Бабаджанов Ш.Ш., Турдахунова С.Т. Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математика для экономистов». **Т.: ТФИ, 2019.**

Данный учено-методический комплекс разработан на основе учебной программы дисциплины «Математика для экономистов», утвержденной Приказом Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан №_______от «___»________2019 г.

Составители: Турдахунова С.Т. – старший преподаватель кафедры высшей математики, статистики и эконометрики

Рецензенты:

Абдуллаев О.Х. – к.ф.м.н., доцент, УзНУ;
Хашимов А.Р.. – к.ф.м.н., доцент, ТМИ.

Учебно-методический комплекс обсужден на заседании кафедры высшей математики, статистики и эконометрики №__ от __ июня 2019 года и рекомендован к рассмотрению на Совете факультета бухгалтерский учет и аудит.

Заведующей кафедрой **Хашимов А.Р.**

Учебно-методический комплекс обсужден Советом заочного отделения и рекомендован к рассмотрению на учебно-методическом совете института (протокол №1 от 29 2019 года).

Начальник заочного отделения **Астанакулов О.**

Учебно-методический комплекс по дисциплине рассмотрен на заседании учебно-методического совета института №__от «__» ______2019 года и рекомендован к утверждению.

Учебно-методический комплекс по дисциплине одобрен на заседании Совета института. Протокол №__ от «__» ______2019 года.

Проректор по учебной работе **Кузиев И.Н.**

1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

План:

1. Понятие функции
2. Равенство функций. Операции над функциями
3. Ограниченные функции
4. Сложные функции (суперпозиции)
5. Неявные функции
6. Параметрическое задание функций
7. Выпуклые и вогнутые функции
8. Специфические свойства функций одной переменной
9. Обратная функция
10.Производственная функция и ее некоторые экономико-математические характеристики

Ключевые слова и словосочетания:

Функция многих переменных, область существования или область определения функции, множество значений функции, равенство функций, сужением функции, ограниченные функция, сложная функция (суперпозиция или композиция), неявная функция, параметрическое задание функций, выпуклые и вогнутые функции, четная и нечетная функция, периодическая функция, выпуклая (вогнутая) функция, возрастающая (неубывающая) функция, строго возрастающая функция, убывающая (невозрастающая) функция, строго убывающая функция, монотонные функции, строго монотонные функции, обратная функция, производственная *функция, двухфакторная производственная функция Кобба – Дугласа, экономико-математические характеристики производственной функции.*

1. Понятие функции

Пусть M - некоторое множество точек n-мерного пространства R^n, т.е. $\mathsf{M}=\{X(x_1;x_2;\ldots;x_n)\}\subseteq R^n$.

1. Если каждой точке $X\in\mathsf{M}$ поставлено в соответствие определенное действительное число $f(X)$, то говорят, что на множестве M **задана функция** $y=f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ **многих переменных,** а именно, $\boldsymbol{n}$**-переменных** $x_1,x_2,\ldots,x_n$. При этом, число $f(X)$ называют **значением функции** y **в точке** X **.**

В частности,

если $\mathsf{M} \subseteq R^1$, т.е. M является подмножеством множества действительных чисел R^1, говорят, что на множестве M задана функция одной переменной $y = f(x)$.

Примеры

1. $f(x) = \lg x$ - функция одной переменной x, заданная на множестве $\mathsf{M} = \{x : x \in R^1, \quad x > 0\}$. В частности $f(10) = \lg 10 = 1$. ▲

2. $f(X) = \dfrac{1 - x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ - функция двух переменных x_1, x_2, заданная на множестве $\mathsf{M} = R^2 \setminus \{O(0,0)\}$. В частности, в точке $A(1;-1)$ имеем

$$f(A) = \frac{1 - 1 \cdot (-1)}{1^2 + (-1)^2} = 1. \ ▲$$

3. $f(X) = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ - функция трех переменных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, заданная на множестве $\mathsf{M} = \{X : X \in R^3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4\}$. В частности, в точке $A(1;1;1)$ имеем $f(A) = \sqrt{4 - 1^2 - 1^2 - 1^2} = 1$. ▲

Упражнения

1. Найти значение функции $y = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4}{1 - x_1^2 - x_2^2}$ в точках окружности $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. ▶

2. Найти $f(x_1, \quad x_2)$, если $f(x_1 + x_2, \quad x_1 - x_2) = x_1 x_2 + x_2^2$. ▶

Замечание. Обратим внимание на правомерность фразы: **функция многих переменных.** С точки зрения общего определения всех функций, которое приводятся в математической литературе: **функция - отображение множества** A **на множество** B, $B = f(A)$, $A \in \mathsf{A}$, $B \in \mathsf{B}$, эта фраза не кажется правомерной. В самом деле, все функции выступают как функции одного аргумента $A \in \mathsf{A}$. Значит, и функцию, заданную на множестве пространства R^n, следует считать функцией одного переменного X (X - точка пространства R^n).

В связи с этим запись

$$y = f(X),\ X \in \mathrm{M} \subseteq R^n,$$

кажется более правомерной, чем запись

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{M} \subseteq R^n.$$

Первая запись не только более правомерна, но и более кратка. Однако от второй записи действительных функций многих переменных мы отказываться не будем. Дело в том, что для изучения функций и операций над ними будет использовано все то, что будет получено в связи с изучением функций одного переменного. Вторая запись функции многих переменных предпочтительнее потому, что, закрепив в ней значения $x_2, x_3, \dots, x_n$, мы получим функцию только одного действительного переменного x_1. Ее мы можем изучать с привлечением всех методов, добытых в связи с исследованием функций одного действительного переменного. Изучив особенности функции по каждому из переменных, мы сможем вынести суждение об особенностях функции по совокупности всех переменных. К такому приему изучения функций многих переменных прибегают весьма часто.

Однако, и мы это еще раз подчеркнем, фраза **«функция многих переменных»** означает только форму (удобную) записи функции. Можно и функцию одного переменного записать в форме функции даже бесконечного числа переменных. В самом деле, всякое действительное число $x = [x], x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$, где $[x]$ - целая часть числа x, x_1 - число десятых, x_2 - сотых и т.д. Поэтому

$$y = f(x) = f([x], x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

т.е. функция одного переменного, записана в форме функции бесконечного числа переменных, каждое из которых принимает только целые значения.

После этого отступления мы приходим к следующему определению функции многих переменных.

2. Функцией n переменных называется отображение множества M пространства R^n на множество действительных чисел и записывают функцию так:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X),\ \ X = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathrm{M} \subseteq R^n.$$

Очевидно, что выше приведенные два определения функции многих переменных эквивалентны.

Множество М называется **областью существования** или **областью определения функции** и обозначается $D(f)$; $D(f) \subseteq R^n$.

В случае, когда функция задана формулой, а область определения ее не указана, тогда под областью определения функции мы будем понимать множество всех точек, в которых выполнимы все операции формулы.

Множество всех значений, которые принимает функция $y = f(X)$ во всех точках своей области определения $D(f)$, называется **множеством значений функции** и обозначается $E(f)$; $E(f) \subseteq R^1$.

Примеры

4. $f(x) = \sqrt{x-1}$ **-** функция одной переменной x**;**

$$D(f) = [1, +\infty) \subset R^1; \quad E(f) = [0, +\infty) \subset R^1. \ \blacktriangle$$

5. $f(X) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ **-** функция двух переменных;

$$D(f) = R^2 \setminus \{O(0,0)\} \subset R^2; \quad E(f) = (0, +\infty) \subset R^1. \ \blacktriangle$$

6. $f(X) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ **-** функция трех переменных;

$$D(f) = \{X : X \in R^3, \ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\} \subset R^3; \quad E(f) = [0,1] \subset R^1. \ \blacktriangle$$

Упражнения

Найти области определения заданных функций.

1. $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$. 2. $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. 3. $y = \sqrt{x_2 \sin x_1}$. ►

5. $y = 1 + \sqrt{-(x_1 - x_2)^2}$. **6.** $y = \ln(x_1^2 + x_2)$. **7.** $y = \ln(x_1 + x_2)$. ►

8. $y = arctg\,\dfrac{x_1 - x_2}{1 + x_1^2 x_2^2}$. **9.** $y = x_1 + \arccos x_2$. **10.** $y = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$. ►

11. $y = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}$. 12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x_2 - \sqrt{x_1}}}$. 13. $y = \arcsin\dfrac{x_2}{x_1}$. ►

2. Равенство функций. Операции над функциями

Функции f и g называются **равными** или **совпадающими,** если они имеют одну и ту же область определения M и для каждого $X \in \mathsf{M}$ значения этих функций совпадают. В этом случае пишут

$$f(X) = g(X), \quad X \in \mathsf{M} \quad \text{или} \quad f = g.$$

Пример 7. Если $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in R^1$ и $g(x) = |x|$, $x \in R^1$, то $f = g$, так как при всех $x \in R^1$ справедливо равенство $\sqrt{x^2} = |x|$. ▲

Если $\mathsf{M}' \subset D(f)$, то функцию $g(X) = f(X)$, $X \in \mathsf{M}'$ называют **сужением функции** f на множество M'.

Пример 8. Если $\mathsf{M}' = [0,+\infty)$, то функция $g(x) = x$, $x \in \mathsf{M}'$ является сужением функции $f(x) = |x|$, $x \in R^1$ на множество M'. ▲

Если равенство $g(X) = f(X)$ верно при всех $X \in \mathsf{M}'$, где $\mathsf{M}' \subset D(f) \cap D(g)$, т, е. сужения функций f и g на множество M' совпадают, то в этом случае говорят, что функции f и g равны на множестве M'. Например, функции $\sqrt{x^2}$ и x равны на множестве $\mathsf{M}' = [0,+\infty)$.

Естественным образом для функций вводятся арифметические операции.

Пусть функции f и g определены на одном и том же множестве M. Тогда функции, значения которых в каждой точке $X \in \mathsf{M}$ равны

$$f(X) + g(X), \quad f(X) - g(X), \quad f(X)g(X), \quad \frac{f(X)}{g(X)}, \quad (g(X) \neq 0 \quad \forall X \in \mathsf{M}),$$

называют, соответственно, **суммой, разностью, произведением и частным функций** f и g и обозначают $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$.

Упражнения

Найти области определения функций f, g, $f+g$.

1. $f(x)=\sqrt[4]{3-x}$, $g(x)=\sqrt{x+1}$. ▶

2. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$. ▶

3. $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$, $g(x)=\lg(x^2-4)$. ▶

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}$, $g(x)=tgx$. ▶

5. $f(x)=\lg(16-x^2)$, $g(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$. ▶

6. $f(x)=x+\sqrt{x-1}$, $g(x)=x-\sqrt{x-1}$. ▶

3. Ограниченные функции

Функция $y=f(X)$ определенная на множестве М, называется **ограниченной сверху (снизу),** если множество принимаемых ею на М значений ограничено сверху (снизу).

Ограниченность сверху (снизу) функции $y=f(X)$ на множестве М означает существование такого числа c, что для всех точек $X\in$М выполняется неравенство $f(X)\le c$ $(f(X)\ge c)$.

Функция $y=f(X)$ называется ограниченной на множестве М, если она ограничена на этом множестве и сверху, и снизу.

В частности, если М является окрестностью некоторой точки $\boldsymbol{A}$, т.е. М$=S_\varepsilon(A)=\{X : X\in R^n,\ \ \rho(X,A)<\varepsilon\}$, то говорят об ограниченности функции $y=f(X)$ в данной окрестности точки A.

Если М - область определения $D(f)$ функции $y=f(X)$, то говорят об ограниченности функции в области определения, при этом множество значений $E(f)$ является ограниченным множеством.

Если функция $y=f(X)$ не ограничена сверху (снизу) на множестве М, то существует последовательность $\{X_k\}$ $(k=1,2,\ldots.)$ точек, принадлежащих М, такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\{f(X_k)\}=+\infty \qquad \left(\lim_{k\to\infty}\{f(X_k)\}=-\infty\right).$$

Примеры

9. Функция $f(x)=\sin x$ ограничена во всей области определения $D(f)=(-\infty,+\infty)$, так как множество ее значений $E(f)=[-1,1]$ - множество ограниченное $(-1\le\sin x\le 1)$. ▲

10. Функция $f(X)=\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}$ ограничена лишь снизу во всей области определения $D(f)=R^2\setminus\{(0,0)\}$, так как множество ее значений $E(f)$ ограничено только снизу так, что $f(X)>0$. Функция не ограничена сверху в любой окрестности точки $O(0,0)$: существует последовательность

$$X_k\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right),\ k=1,2,\ldots.$$

сходящаяся к точке $O(0,0)$ и такая, что последовательность значений функции

$$f(X_k)=\frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2}=\frac{k^2}{2}$$

стремится к $+\infty$. ▲

Упражнения

1. Показать, что функция $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in R^1$, $x\neq 0$, неограниченна, и построить ее график. ►

2. Показать, что функция $y=\dfrac{x^3}{x^4+1}$, $\quad x\in R^1$, ограничена. ►

3. Показать, что сумма и произведение ограниченных функций – ограниченная функция. ►

4. Сложные функции (суперпозиции)

Пусть функция $y=f(u_1,u_2,\ldots,u_m)$ определена на некотором множестве $\mathrm{W}\subseteq R^m$ переменных $u_1,u_2,\ldots,u_m$, а каждая из функций

$$u_1=g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad u_2=g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\quad ,\ldots,\quad u_m=g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

определена некотором множестве $\mathrm{M}\subseteq R^n$ переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Если при этом каждой точке $X(x_1;x_2;\ldots,x_n)\in\mathrm{M}$ можно поставить в соответствие точку $U(u_1;u_2;\ldots,u_m)\in\mathrm{W}$, где

$$u_1=g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad u_2=g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\quad ,\ldots,\quad u_m=g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

то на множестве $\mathfrak{M}$ определяется функция

$$y=f\big(g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\quad ,\ldots,\quad g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)\big),$$

называемая **сложной функцией переменных** $x_1,x_2,\ldots,x_n$ **или суперпозицией (композицией) функций** $f,g_1,g_2,\ldots,g_m$.

В частности, если даны две функции одной переменной $y=f(u)$, $u=g(x)$ и при этом $E(g)\subseteq D(f)$) (множество значений функции g является подмножеством области определения функции f), то говорят о сложной функции $y=f\big(g(x)\big)$ одной переменной x.

Примеры

11. Следующие пара функций $y=2^u$, $u=\sin x$ задает сложную функцию $y=2^{\sin x}$, определенную на множестве R^1 и имеющую множеством значений отрезок $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$. ▲

12. Аналогично, функция $y=\ln\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ является суперпозицией следующих функций

$$y=\ln u,\ \ u=\cos v,\ \ v=\frac{1}{z},\ \ z=\sqrt{x}\,.$$

5. Неявные функции

Говорят, что функция $y=f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ неявно задана уравнением $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0$, если существует множество $\mathrm{M}\subseteq R^n$ такое, что для всех точек $X(x_1;x_2;\ldots,x_n)\in\mathrm{M}$ справедливо тождество

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,f(x_1,x_2,\ldots,x_n))\equiv 0.$$

Одно и то же уравнение может задавать неявно не одну, а несколько функций. Например, уравнение $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ задает неявно две функции

$$y_1=f_1(X)=+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}$$

и

$$y_2=f_2(X)=-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}\,,$$

определенные на множестве $\mathrm{M}=\{X: X\in R^n,\ \ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1\}$

В частности, уравнение $F(x,y)=0$ при указанных предположениях задает неявно функцию $y=f(x)$ одной переменной x; уравнение $F(x_1,x_2,y)=0$ задает неявно функцию $y=f(x_1,x_2)$ двух переменных и т. д.

Название «неявная функция» отражает способ задания функциональной зависимости.

6. Параметрическое задание функций

Часто бывает полезно (например, при изучении неявных функций) функциональную зависимость между несколькими переменными выражать через вспомогательные переменные - параметры. Так, для функции, неявно заданной уравнением $F(x,y)=0$, необходимо каждую из переменных x и y выразить через один параметр; для функции, неявно заданной уравнением $F(x_1,x_2,y)=0$, необходимо каждую из переменных x_1,x_2,y выразить через два параметра.

Выражение переменных через параметры называют **параметрическим заданием** функциональной зависимости.

Примеры

13. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$задается параметрически в виде $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$, где $0\le t\le 2\pi$. ▲

14. Прямая линия в пространстве имеет параметрическое задание $x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt$, где $(x_0,\quad y_0,\quad z_0)$ - точка, через которую проходит прямая; $(m,\quad n,\quad p)$ - вектор, параллельный прямой; $-\infty<t<+\infty$. ▲

15. Зависимость $z=x^2+y^2$ (параболоид вращения) может быть задана параметрически в виде $x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\quad z=r^2$, где параметры r и t изменяются в следующих пределах: $0\le r\le+\infty;\quad 0\le t\le 2\pi$. ▲

7. Выпуклые и вогнутые функции

Пусть функция $y=f(X)$ определена на выпуклом множестве $\mathrm{M}\subseteq R^n$.

Функция $y=f(X)$ называется **выпуклой (вогнутой)** на множестве M, если для любых двух точек $X(x_1;x_2;...,x_n)$ и $Y(y_1;y_2;...,y_n)$, принадлежащих M, и для любого действительного числа $0\le\lambda\le 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda X+(1-\lambda)Y)\le\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y)\quad\left(f(\lambda X+(1-\lambda)Y)\ge\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y)\right).$$

Примеры

16. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^2$- выпуклая на $\boldsymbol{R}^1$. Действительно, для произвольных $\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^1$ и любого $\lambda\in[0,1]$ получим

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(z)-f(\lambda x+(1-\lambda)z)=\lambda x^2+(1-\lambda)z^2-(\lambda x+(1-\lambda)z)^2=$$

$$=\lambda(1-\lambda)x^2-2\lambda(1-\lambda)xz+\lambda(1-\lambda)z^2=\lambda(1-\lambda)(x-z)^2\geq 0. \ \blacktriangle$$

17. Линейная функция

$$f(X)=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$$

является одновременно и выпуклой, и вогнутой на всем пространстве R^n.

18. Квадратичная (форма) функция

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k$$

является выпуклой (вогнутой) на R^n тогда и только тогда, когда она является **знакоположительной** (**знакоотрицательной**), т.е. принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Например, квадратичная (форма) функция

$$f(X)=2x_1^2+11x_2^2+52x_3^2+8x_1x_2+4x_1x_3-16x_2x_3,$$

является выпуклой на пространстве R^3.

Действительно,

$$f(X)=2(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3)+11x_2^2+52x_3^2-16x_2x_3=$$

$$=2(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2+4x_2x_3)+3x_2^2+50x_3^2-24x_2x_3=$$

$$=2(x_1+2x_2+x_3)^2+3(x_2^2-8x_2x_3+16x_3^2)+2x_3^2=$$

$$=2(x_1+2x_2+x_3)^2+3(x_2-4x_3)^2+2x_3^2\geq 0.$$

во всех точках пространства R^3, т.е. данная квадратичная функция $f(X)$ является знакоположительной. ▲

Свойства выпуклых функций

1°. Функция $f(X)$ выпукла на множестве M тогда и только тогда, когда функция $-f(X)$ вогнута на M.

2°. Если функции $f_1(X)$ и $f_2(X)$ выпуклы на множестве M, то функция $k_1 f_1(X) + k_2 f_2(X)$, где k_1, k_2 - произвольные неотрицательные числа, также является выпуклой на M.

3°. Если функция $f(X)$ выпукла на множестве M, то множество $\{X \in \mathrm{M}: f(X) \le b\}$, где b - любое число, если только оно не пусто, само является выпуклым множеством.

4°. Если выпуклая функция $f(X)$ определена на открытом множестве M, то на этом множестве она непрерывна.

Аналогичные свойства имеют место и для вогнутых функций.

8. Специфические свойства функций одной переменной

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $\mathrm{M} \subseteq R^1$, называется **четной** на этом множестве, если множество M симметрично относительно точки $x = 0$ и имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in \mathrm{M}$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат Oy.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $\mathrm{M} \subseteq R^1$, называется **нечетной** на этом множестве, если множество M симметрично относительно точки $x = 0$ и имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in \mathrm{M}$.

График нечетной функции симметричен относительна начала координат.

Примеры

19. Функция $y = \cos x$, для которой $D(f) = (-\infty, +\infty)$, является четной функцией, так как $\cos(-x) = \cos x$ для всех $x \in D(f)$. ▲

20. Функция $y = \arcsin x$, для которой $D(f) = [-1,1]$, является нечетной функцией, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ для всех $x \in D(f)$. ▲

Функция $y = f(x)$ называется **периодической,** если существует такое положительное действительное число t, что для всех точек x и $x + t$ из области определения функции имеет место равенство $f(x+t) = f(x)$. При этом число t называют **периодом функции**.

Практически всегда ставится вопрос о наименьшем из всех возможных периодов, т.е. о числе $T = \min\limits_i t_i$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, отлична от постоянной и периодическая на R^1, то существует наименьший период T этой функции. Все остальные периоды кратны T.

Примеры

2l. $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют период $T = 2\pi$. ▲

22. $y = tgx$ и $y = ctgx$ имеют период $T = \pi$. ▲

23. Функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x - \text{рациональное}, \\ 0, & \text{если} \quad x - \text{иррациональное}, \end{cases}$$

имеет периодом любое положительное рациональное число, однако не имеет наименьшего периода. ▲

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (неубывающей)** на некотором множестве $\mathrm{M} \subseteq D(f)$, если она определена на этом множестве и если для любых значений $x_1, x_2 \in \mathrm{M}$ из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) \le f(x_2).$$

Если это неравенство является строгим $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$, то функцию $y = f(x)$ называют **строго возрастающей** на множестве M.

Таким образом, функция $y = f(x)$ называется:

а) **возрастающей (неубывающей)** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{M} \;\; \forall x_2 \in \mathrm{M}: \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2);$$

б) **строго возрастающей** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{M} \;\; \forall x_2 \in \mathrm{M}: \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично, функция $y = f(x)$ называется:

а) **убывающей (невозрастающей)** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{M} \;\; \forall x_2 \in \mathrm{M}: \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2);$$

б) **строго убывающей** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{M} \;\; \forall x_2 \in \mathrm{M}: \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Убывающие и возрастающие функции называют **монотонными функциями,** а строго возрастающие и строго убывающие - называют **строго монотонными.**

Если $\mathrm{M} = D(f)$, то в этих определениях указание на множество M обычно опускают.

Примеры

24. $y = \lg x$ - строго возрастающая функция во всей области определения. ▲

25. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ - строго убывающая функция во всей области определения. ▲

26. $y = x^2$ - строго возрастающая в промежутке $\mathrm{M} = [0, +\infty)$ и строго убывающая в промежутке $\mathrm{M} = (-\infty, 0]$. ▲

27. $y = E(x) = [x]$ (целая часть числа $\boldsymbol{x}$) - неубывающая функция. ▲

28. $y = \sin x$**,** строго возрастающая функция на $\mathrm{M} = \left[-\frac{\pi}{2}, \; \frac{\pi}{2}\right]$. ▲

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x)=x^3+3x+5$ возрастает во всей области ее определения. ►

2. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ убывает в промежутке $(1, \ +\infty)$.►

9. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ определена в области $D(f)\subset R^1$ и имеет множество значений $E(f)$. Если эта функция такова, что для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует условие $f(x_1)\neq f(x_2)$, то каждому $y\in E(f)$ можно поставить в соответствие определенное $x\in D(f)$ такое, что $f(x)=y$, т. е. на множестве $E(f)$ можно определить функцию $x=g(y)$, называемую **обратной** к заданной функции $y = f(x)$.

Областью определения обратной функции является множество значений $E(f)$ функции $y = f(x)$. Множеством значений обратной функции является область определения $D(f)$ функции $y = f(x)$.

Например, функция $y=x^2$, заданная в промежутке $[0,+\infty)$, имеет обратную функцию $x=+\sqrt{y}$, определенную на множестве $E(y)=[0,+\infty)$ Эта же функция, заданная в промежутке $(-\infty,0]$, имеет обратную функцию $x=-\sqrt{y}$, определенную на множестве $E(y)=[0,+\infty)$. Однако функция $\boldsymbol{y = f(x) = x^2}$, заданная, например, на отрезке $[-2,2]$, не имеет обратной функции, так как $f(-1)=f(1)=1$ (двум различным значениям аргумента $x=-1$ и $x=1$ соответствует одно и то же значение y).

Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a,b]$, то она имеет обратную функцию $x = g(y)$, определенную, непрерывную и строго монотонную на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

Упражнения

Являются ли взаимно обратными функции, следующие заданные функции.

1. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $\quad y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **2.** $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, $\quad y = (1-x)^3$.

3. $y = 1 + \sqrt{x}$, $\quad y = (x-1)^2$. **4.** $y = \sqrt{1-x^2}$, $\quad y = \sqrt{1-x^2}$. ►

10. Производственная функция и ее некоторые экономико-математические характеристики

Пусть R_+^n положительный ортант n- мерного пространства, каждый вектор $X = (x_1,\ldots,x_n)$ которого интерпретируется как вектор затрат производственных ресурсов (в стоимостном или натуральном выражении). В качестве факторов производства здесь могут выступать как первичные факторы в обычном понимании, так и продукты производства, внешнего по отношению к изучаемому, выступающие в данном случае как ресурсы или сырье.

Пусть R_+^m - положительный ортант m- мерного пространства, каждый вектор $Y = (y_1,\ldots,y_m)$ которого интерпретируется как набор количественных оценок результатов производства при определенных затратах ресурсов. Такими количественными оценками могут служить, например, физический объем выпуска по каждому из наименований выпускаемой продукции, стоимостные показатели.

Если P- некоторый производственный процесс, то **производственной функцией** f этого процесса будем называть отображение $f: D \to V$, где $D \subseteq R_+^n$, $V \subseteq R_+^m$, моделирующее выпуск продукции в процессе P.

Введение множеств D, V обусловлено тем, что в реальных ситуациях построение функции f для процесса P происходит всегда на основе ограниченного статистического материала. В этом случае отчетные данные, на основе которых строится функция, заполняют ограниченные участки соответствующих пространств. При этом может случиться, что удобная аналитическая форма функции f дает хорошие результаты (т.е. достаточно адекватно моделирует процесс P) только в пределах некоторых множеств D и V.

Замечание. Проблема построения производственной функции, так же как и проблема ее использования с целью анализа производства в масштабах народного хозяйства в целом или отдельных его отраслей, представляет собой сложную научную задачу, рецепта, для решения которой в общем случае в настоящий момент не существует.

Отметим сразу, что, несмотря на широту приведенного выше определения производственной функции, до сих пор в научной и прикладной экономико-математической литературе в основном изучался случай $m = 1$, т.е. когда имеется единственная количественная оценка результатов производства. В этом случае производственную функцию естественно записывать как обычную функцию нескольких переменных

$$y = f(x_1, ..., x_n). \tag{1}$$

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с таким случаем.

Для введения основных математических характеристик производственной функции и выяснения их экономической интерпретации, рассмотрим двухфакторную производственную функцию. Обозначим через K объем основных фондов, либо в стоимостном выражении, либо в количественном (скажем, число станков). Пусть L - числовое выражение объема трудовых ресурсов, т.е. число рабочих, число человеко-дней, человеко-часов и т.д., Y - объем выпущенной продукции в стоимостном выражении, либо в натуральном, если мы имеем дело с отраслью, выпускающей один продукт. Тогда производственная функция имеет вид

$$Y = F(K, L). \qquad (2)$$

Ниже в качестве иллюстрации будем рассматривать одну из наиболее распространенных двухфакторных производственных функций - функцию Кобба - Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad (3)$$

где $A > 0$- константа, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$. Обычные требования на производственную функцию (2) заключаются в требовании гладкости, которого мы приведем в последующих лекциях.

Ниже приведем основные экономико - математические характеристики производственной функции (2).

Средняя производительность труда определяется как $y = \frac{Y}{L}$ - отношение объема произведенного продукта к количеству затраченного труда. Отметим, что эта характеристика (как и все прочие) является функцией фазовых координат K, L. Средняя фондоотдача; $z = \frac{Y}{K}$- отношение объема произведенного продукта к величине основных фондов.

Для функции Кобба - Дугласа, например, средняя производительность труда равна $Y = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$ и в силу условия $\beta < 1$ является убывающей функцией аргумента L. Другими словами, с увеличением затрат труда средняя производительность труда падает. Этот вывод допускает естественное объяснение - поскольку величина второго фактора K остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда. Таким образом, становится ясным и значение такой характеристики, как фондовооруженность труда $k = \frac{K}{L}$, показывающая объем основных фондов, приходящийся на одного работника.

Наряду со **средними показателями** при анализе производственных функций играют роль и **предельные характеристики функции**. Эти характеристики мы приведем в последующих лекциях.

При изучении производственных функций часто делают различные предположения, в той или иной мере отвечающие экономической реальности. Основное предположение состоит в том, что производственную функцию (2) считают однородной первой степени или линейно-однородной, т.е. требуют выполнения соотношения $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ для всех $\lambda > 0$. Можно по-разному толковать содержательный смысл условия однородности. Здесь (из-за ограниченности возможности) эти толкования и многие другие вопросы, связанные с производственной функцией не приводятся.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение функции многих переменных. Прокомментируйте правомерность фразы: **функция многих переменных.**

2. Что называется областью существования или областью определения функции и как она обозначается?

3. Что называется множеством значений функции и как оно обозначается?

4. Когда две функции называются равными? Что называется сужением функции?

5. Каким образом для функций вводятся арифметические операции?

6. Что называется ограниченной функцией? Приведите примеры.

7. Дайте определение сложной функции многих переменных (суперпозиции или композиции функции многих переменных). Приведите примеры.

8. Когда говорят, что функция задана неявно? Что отражает название «неявная функция»?

9. Что означает параметрическое задание функции?

10. Что называется выпуклой (вогнутой) функцией? Приведите свойства выпуклых функций.

11. Что называется четной (нечетной) функцией?

12. Что называется периодической функцией?

13. Что называется возрастающей (неубывающей) функцией?

14. Что называется строго возрастающей функцией?

15. Что называется убывающей (невозрастающей) функцией?

16. Что называется строго убывающей функцией?

17. Какие функции называются монотонными (строго монотонными) функциями?

18. Что называется обратной функцией к заданной функции? Когда существует обратная функция к заданной?

19. Что называется производственной функцией? Какой вид имеет одна из наиболее распространенных двухфакторных производственных функций - функцию Кобба – Дугласа?

20. Какие экономико-математические характеристики производственной функцией можете приводить?

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. **Mathematics for Economics.** Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England. 2001. - 1130 p. **(50-60; 455 – 457)**

2. Бабаджанов Ш.Ш. **Высшая математика. Часть II**. Учебное пособие. Т.: «IQTISOD MOLIYA», 2015. – 420 с.

3. Малыхин В.И. **Высшая математика.** Учебное пособие. 2- е изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2009. - 365 с.

2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИЙ

План:

1. Предел функции одной переменной

2. Вычисление пределов

3. Предел функции многих переменных

Ключевые слова и словосочетания

Проколотая δ - окрестность точки, предел функции в точке, частичный предел функции в точке, односторонние конечные пределы, бесконечные пределы в конечной точке, бесконечно большая функция, предел в бесконечности, бесконечно малые функции, критерий существования предела функции, раскрытие неопределенностей, замечательные пределы, важные пределы, двойной предел, повторный предел.

1. Предел функции одной переменной

1.1. Понятие предела. Важную роль в математическом анализе играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки.

Напомним, что δ-окрестностью точки a называется интервал длины 2δ с центром в точке $\boldsymbol{a}$, т. е. множество

$$O_\delta(a)=\{x:\ |x-a|<\delta\}=\{x:\ a-\delta<x<a+\delta\}.$$

Если из этого интервала удалить точку a, то получим множество, которое называют **проколотой δ-окрестностью точки $\boldsymbol{a}$** и обозначают $\dot{O}_\delta(a)$**,** т.е.

$$\dot{O}_\delta(a)=\{x:\ |x-a|<\delta,\ \ x\neq a\}=\{x:\ 0<|x-a|<\delta\}.$$

а) Определение предела по Коши

Число b **называется пределом функции $f(x)$ в точке a,** если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta,\ x\neq a$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ или $f(x)\to b$ при $x\to a$.

С помощью логических символов это определение можно записать так:

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x)=b\right\}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\quad \forall x:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon,$$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x)=b\right\}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\quad \forall x\in\dot{O}_\delta(a)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(b).$$

В случае бесконечного a, т.е. $x\to\infty$ определение таково:

Число b **называется пределом функции** $f(x)$ **при** $x \to \infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $M > 0$ такое, что для всех $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

б) Определение предела по Гейне

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т.е. $\exists \delta_0 > 0$: $\dot{O}_{\delta 0}(a) \subset D(f)$ и для любой последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к a и такой, что $x_k \in \dot{O}_{\delta_0}(a)$ для всех $k \in \mathbf{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_k)\}$ сходится к числу b.

Пример 1. Пользуясь определением предела по Гейне, доказать, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

Решение

Достаточно показать, что существуют последовательности $\{x_k\}$ и $\{\tilde{x}_k\}$ с отличными от нуля членами, сходящиеся к нулю и такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \ne \lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k)$.

Возьмем $x_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $\tilde{x}_k = (k\pi)^{-1}$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{x}_k = 0$, $f(x_k) = 1$ и $f(\tilde{x}_k) = 0$ для всех $k \in \mathbf{N}$, и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = 1$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = 0$. Следовательно, функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$. ▲

Если функция f определена в проколотой δ_0-окрестности точки a и существуют число b и последовательность $\{x_k\}$ такие, что $x_k \in \dot{O}_{\delta_0}(a)$ при всех $k \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$, то число b называют **частичным пределом функции** f **в точке** a.

Пример 2. Для функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ каждое число $b = [-1,\ 1]$ является ее частичным пределом. В самом деле, последовательность $\{x_k\}$, где $x_k = (\arcsin b + 2k\pi)^{-1}$, образованная из корней уравнения

$\sin\frac{1}{x} = b$ (рис. 1),

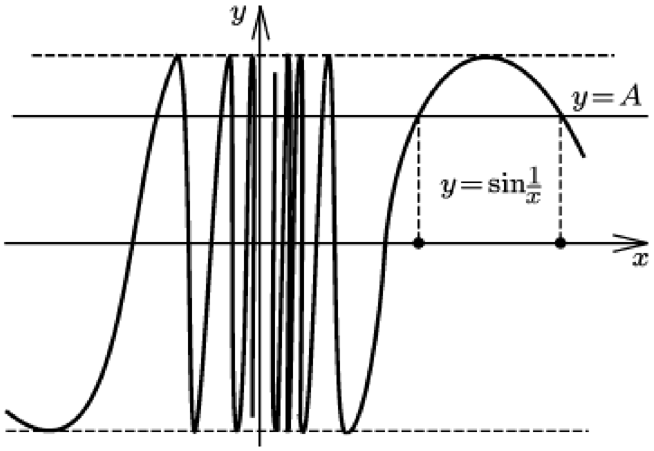

Рис. 1

такова, что $x_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

Замечание. Определение *Гейне* весьма полезно на практике. Например, если существование предела установлено, то для его нахождения достаточно определить предел $f(x)$ для какой-нибудь одной подпоследовательности x_k.

в) Эквивалентность двух определений предела.

Теорема 1. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Упражнение

Доказать, что если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то этот предел единственный. ►

1.2. Различные типы пределов. Различных типов пределов оказывается довольно много. Если их воспринимать как разные понятия и укладывать в голове независимо друг от друга - никакого места не хватит. Есть всего одно понятие предела. Одна идея, одна схема. Остальное - вариации. И эти вариации, желательно, чтобы сами выскакивали из головы по мере надобности. Если «не выскакивают» - лучше еще повозиться с общей идеей. А заглядывать в книжку даже вредно.

Вариации определяются природой переменных: a, b могут быть в том числе бесконечностями; x, f - дискретными или непрерывными величинами.

Ниже в качестве примера из числа различных типов пределов рассмотрим ***односторонние конечные пределы.***

Число b_1 называют **пределом слева функции** $f(x)$ в **точке** a и обозначают $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ или $f(a-0)$ если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in(a-\delta,\ a)\Rightarrow\left|f(x)-b_1\right|<\varepsilon.$$

Аналогично число b_2 называют **пределом справа функции** $f(x)$ в **точке** a и обозначают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ или $f(a+0)$ если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in(a,\ a+\delta)\Rightarrow\left|f(x)-b_2\right|<\varepsilon.$$

Числа b_1 и b_2 характеризуют поведение функции f соответственно в левой и правой полуокрестности точки a, поэтому пределы слева и справа называют **односторонними пределами.** Если $a=0$, то предел слева функции $f(x)$ обозначают $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=b$ или $f(-0)$, а предел справа обозначают $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=b$ или $f(+0)$.

Пример 3. Для функции

$$sign(x)=\begin{cases}-1, & если \quad x<0,\\ 0, & если \quad x=0,\\ 1, & если \quad x>0,\end{cases}$$

график которой изображен на рис. 2,

$$\lim_{x\to -0} f(x)=f(-0)=-1, \qquad \lim_{x\to +0} f(x)=f(+0)=1.\blacktriangle$$

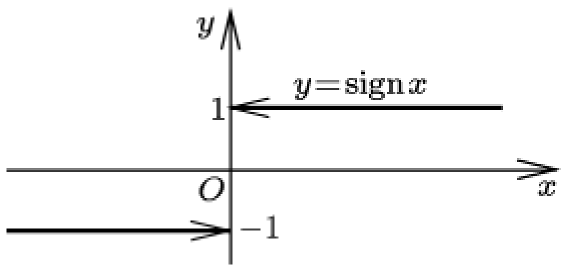

Рис. 2

Отметим еще, что если

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta>0: \quad \forall x\in\dot{O}_\delta(a) \quad \Rightarrow f(x)\in[b,\quad b+\varepsilon),$$

т.е. значения функции лежат в правой ε- полуокрестности числа b, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b+0$. В частности, если $b=0$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +0$.

Аналогично

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x) = b-0\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta>0: \ \ \forall x\in \dot{O}_\delta(a) \ \ \Rightarrow f(x)\in(b-0, \ \ b]$$

Пример 4. Для функции

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \textit{если} \quad x<0, \\ 2, & \textit{если} \quad x=0, \\ 1+\sqrt{x}, & \textit{если} \quad x>0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 3, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1+0$. ▲

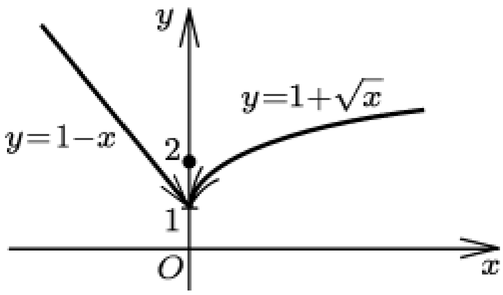

Рис. 3

Аналогичный смысл имеют записи вида

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b+0, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = b-0.$$

Например,

$$\left\{\lim_{x\to a-0} f(x) = b+0\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta>0: \ \ \forall x\in(a-\delta, \ a) \Rightarrow f(x)\in\{b, \ \ b+\varepsilon).$$

Упражнение

Записать с помощью логических символов утверждение:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b-0. \ ►$$

Упражнение

Доказать, что функция $f(x)$ имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции f и выполняется равенство $f(a-0) = f(a+0)$. ►

1.3. Свойства пределов функций. В рассматриваемых ниже свойствах речь идет о конечном пределе функции в заданной точке. Под точкой понимается либо число a, либо один из символов $a-0$, $a+0$, $-\infty$, $+\infty$, ∞. Предполагается, что функция определена в некоторой окрестности или полуокрестности точки a, не содержащей саму точку a. Для определенности будем формулировать и доказывать свойства пределов, предполагая, что a - число, а функция определена в проколотой окрестности точки a.

а) Локальные свойства функции, имеющей предел. Покажем, что функция, имеющая конечный предел в заданной точке, обладает некоторыми **локальными** свойствами, т. е. свойствами, которые справедливы в окрестности этой точки.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена.

Свойство 2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, причем $b\neq 0$, то найдется такая проколотая окрестность точки $\boldsymbol{a}$, в которой значения функции f имеют тот же знак, что и число b.

Это свойство **называют свойством сохранения знака предела.**

Свойство 3. Если $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, причем $c\neq 0$, то существует число $\delta>0$ такое, что функция $\dfrac{1}{g(x)}$ ограничена на множестве $\dot{O}_\delta(a)$.

б) Свойства пределов, связанные с неравенствами

Свойство 1. Если существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x\in\dot{O}_\delta(a)$ выполняются неравенства

$$g(x)\le f(x)\le h(x), \tag{2}$$

и если

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=b, \tag{3}$$

то существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Свойство 2. Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{O}_\delta(a)$ справедливо неравенство $f(x) \le g(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то $b \le c$.

Замечание. Если исходное неравенство является строгим, т.е. $f(x) < g(x)$, то в случае существования пределов функций f и g в точке $\boldsymbol{a}$ можно утверждать только, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$, т. е. знак строгого неравенства между функциями при переходе к пределу, вообще говоря, не сохраняется.

Упражнение

Доказать, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ причем $b < c$, то существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.►

в) Бесконечно малые функции. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(\boldsymbol{x})$ называют бесконечно малой при $x \to a$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to a$;

2) произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Эти свойства легко доказать, используя определения бесконечно малой и ограниченной функции, либо с помощью определения предела функции по Гейне и свойств бесконечно малых последовательностей. Из второго свойства следует, что произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Замечание. Из определения предела функции и определения бесконечно малой функции следует, что число b является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to 0$. ▶

2. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что $\alpha(x) \neq 0$ для всех $x \in \dot{O}_\delta(a)$. Доказать, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$. ▶

г) Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то

1) $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = b + c$,

2) $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = b \cdot c$, (4)

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ при условии, что $c \neq 0$.

Отметим частный случай утверждения (4):

$$\lim_{x \to a}\big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot \lim_{x \to a} f(x),$$

т. е. постоянный множитель можно вынести за знак предела.

1.4. Пределы монотонных функций. Понятие монотонной функции было введено в § 17. Приведем теорему о существовании односторонних пределов у монотонной функции.

Теорема 2. Если функция f определена и является монотонной на отрезке $[a, \; b]$, то в каждой точке $x_0 \in (a, \; b)$ эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках a и b соответственно правый и левый пределы.

Следствие. Если функция f определена и возрастает на отрезке $[a, \; b]$, $x_0 \in (a, \; b)$, то $f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0)$

Замечание. Теорема о пределе монотонной функции справедлива для любого конечного или бесконечного промежутков. При этом, если f - возрастающая функция, не ограниченная сверху на $(a, \; b)$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$ (в случае, когда $a = +\infty$, пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$), а если f - возрастающая и не ограниченная снизу на промежутке $(a, \; b)$ функция, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\right)$

1.5. Критерий Коши существования предела функции. Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x = a$ **условию Коши,** если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x', x'' \in \dot{O}_\delta(a) \Rightarrow \left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon \tag{5}$$

Теорема 3. Для того чтобы существовал конечный предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши (5).

Замечание. Теорема 3 остается в силе, если точку a заменить одним из символов $a-0$, $a+0$, $-\infty$, $+\infty$; при этом условие (5) должно выполняться в окрестности этого символа.

2. Вычисление пределов функций

2.1. Раскрытие неопределенностей

При вычислении пределов часто встречается случай, когда требуется найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где f и g - бесконечно малые функции при $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. В этом случае вычисление предела называют **«раскрытием неопределенности»** вида $\dfrac{0}{0}$.

Чтобы найти такой предел, обычно преобразуют дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, выделяя в числителе и знаменателе множитель вида $(x-a)^k$. Например, если в некоторой окрестности точки $x=a$ функции f и g представляются в виде $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, $g(x)=(x-a)^k g_1(x)$, где $k\in\mathbf{N}$, а функции $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{g}_1$ непрерывны (понятие непрерывности рассмотрим в чуть ниже) в точке a, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x\neq a$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}$, если $g_1(a)\neq 0$.

Аналогично, если f и g - бесконечно большие функции при $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то говорят, что их частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и разность $f(x)-g(x)$ представляют собой при $x\to a$ неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $\infty-\infty$ соответственно. Для раскрытия неопределенностей таких типов обычно преобразуют частное или разность так, чтобы к полученной функции были применены свойства пределов. Например, если f и g - многочлены степени m т.е. $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$, $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$, где $a_k\neq 0$, $b_k\neq 0$, то разделив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ на x^m найдем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_m+a_{m-1}\dfrac{1}{x}+\cdots+a_0\dfrac{1}{x^m}}{b_m+b_{m-1}\dfrac{1}{x}+\cdots+b_0\dfrac{1}{x^m}}=\frac{a_m}{b_m}$$

2.2. Замечательные и некоторые важные пределы .

Теорема 11 (первый замечательный предел). Если $\boldsymbol{x} \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Теорема 12 (второй замечательный предел). Функция $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ имеет при $x \to 0$ предел, равный e $(e = 2{,}718\ldots)$, т.е.

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Существуют некоторые важные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1.$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1.$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{shx}{x} = 1$, где $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$.

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ для любого $\alpha \in R^1$, $\alpha \neq 0$.

Доказательство некоторых из них приведем ниже:

2) Пусть $y = \arcsin x$ тогда $x = \sin y$ и поэтому

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y},$$

причем $\{x \to 0\} \Leftrightarrow \{y \to 0\}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y}.$$

Используя первый замечательный предел $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$, получаем соотношение 2).

3) Если $y = arctgx$ тогда $x = tgy$ и поэтому

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y},$$

причем $\{\boldsymbol{x} \to 0\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{y} \to 0\}$.

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{tgy},$$

где

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{tgy}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=1,$$

то справедливо утверждение 3). ▲

Упражнение

Остальные важные пределы доказать самостоятельно. ►

2.3. Сравнение функций.

а) Эквивалентные функции

Если в некоторой проколотой окрестности* точки x_0 определены функции f, g, h такие, что

$$f(x)=g(x)\cdot h(x),\quad \lim_{x\to x_0} h(x)=1, \tag{7}$$

то функции f и g называют **эквивалентными (асимптотически равными)** при $x\to x_0$ и пишут

$$f(x)\sim g(x) \text{ при } x\to x_0,$$

или, короче, $f\sim g$ при $x\to x_0$.

Например, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, так как $\sin x = x\cdot\dfrac{\sin x}{x}$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$

$\dfrac{x^4}{x^2+1}\sim x^2$ при $x\to\infty$, так как $\dfrac{x^4}{x^2+1}=x^2\dfrac{x^2}{x^2+1}$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1.$

Упражнения

1. Показать, что отношение эквивалентности функций обладает свойствами:

а) симметричности, т. е. если $\boldsymbol{f\sim g}$ при $\boldsymbol{x\to x_0}$, то $\boldsymbol{g\sim f}$ при $\boldsymbol{x\to x_0}$;

---

* В этом подпункте во избежание путаницы проколотую окрестность точки $\boldsymbol{x_0}$ обозначим через $\dot U_\delta(x_0)$, т.е. $\dot U_\delta(x_0)\equiv \dot O_\delta(x_0)$.

б) транзитивности, т. е. если $f \sim g$ и $g \sim \varphi$ при $x \to x_0$, то $f \sim \varphi$ при $x \to x_0$. ►

2. Показать, что если $f \sim g$ и $f_1 \sim g_1$ при $x \to x_0$, то $ff_1 \sim gg_1$ при $x \to x_0$. ►

Отметим, что функции f и g, не имеющие нулей в проколотой окрестности точки x_0, эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1.$$

Понятие эквивалентности обычно используют в тех случаях, когда обе функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при

$x \to x_0$.

Некоторые замечательные и важные пределы, приведенные выше, позволяют составить следующую таблицу функций, эквивалентных при $x \to 0$:

$$\begin{array}{ll}
\sin x \sim x & e^x - 1 \sim x \\
\operatorname{tg} x \sim x & \operatorname{sh} x \sim x \\
\arcsin x \sim x & \ln(1+x) \sim x \\
\operatorname{arctg} x \sim x & (1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x
\end{array}$$

Эти соотношения остаются в силе при $x \to x_0$, если заменить в них x на функцию $\alpha(x)$ такую, что $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Например,

$$\sin x^2 \sim x^2 \text{ при } x \to 0,$$

$$\operatorname{sh}(x-1)^3 \sim (x-1)^3 \text{ при } x \to 1.$$

Пример 10. Доказать, что

а) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, при ; б) $ch\, x - 1 \sim \dfrac{x^3}{2}$ при $x \to 0$.

Решение

а) Пользуясь тем, что $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и $\sin\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x}{2}$ при $x \to 0$, получаем $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

б) Так как $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $ch\,x - 1 = 2\,sh^2\dfrac{x}{2}$ и $sh\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x}{2}$ при $x \to 0$, то $ch\,x - 1 \sim$ $\dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$. ▲

б) Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.

Теорема 13. Если $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to x_0$, то из существования предела функции $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x \to x_0$ следует существование предела функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ и справедливость равенства

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x \cdot (e^x - 1)}{\cos x - \cos 3x}$.

Решение

Так как $\arcsin x \sim x$, $e^x - 1 \sim \boldsymbol{x}$, $\cos x - \cos 3x = 2\sin x \sin 2x$, $\sin x \sim x$, $\sin 2x$ $\sim 2x$, то $\arcsin x \cdot (e^x - 1) \sim x^2$, $\cos x - \cos 3x \sim 4x^2$ при $x \to 0$. Отсюда по теореме 5 следует, что искомый предел равен 1/4. ▲

В заключении отметим, что в дальнейшем будут рассмотрены более эффективные методы вычисления пределов, основанные на использовании понятия производной.

3. Предел функции многих переменных

4.1. Предел функции многих переменных в точке.

Пусть функция $f(X)$ в проколотой окрестности $\dot{O}_\delta(A)$ точки A пространства R^n. Говорят, что число b есть предел функции $f(X)$ при $X \to A$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что $\forall X \in \dot{O}_\delta(A)$ выполнено неравенство $|f(X) - b| < \varepsilon$.

Говорят, что функция $f(X)$, определенная в $\dot{O}_\delta(A)$, имеет при $X \to A$ предел b, если для любой последовательности $X_k \in \dot{O}_\delta(A)$ и такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(X_k) = b$.

Эквивалентность двух определений предела доказывается так же, как и для функций одной переменной.

Если число b есть предел функции $f(X)$ при $X \to A$, то будем писать $b = \lim\limits_{X\to A} f(X)$.

Если функция двух переменных $f(x_1, x_2)$ определена в $\dot{O}_\delta(A(a_1, a_2))$, а число b есть ее предел при $(x_1, x_2) \to (a_1, a_2)$, то пишут

$$b = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2)$$

и называют **иногда число b двойным пределом.**

Аналогично для функции n переменных наряду с обозначением $b = \lim\limits_{X\to A} f(X)$ будем использовать обозначение

$$b = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Лемма 1. Пусть функции $f(X)$ и $\varphi(X)$ определены в $\dot{O}_\delta(A)$ и $|f(X)| \le \varphi(X)$ в $\dot{O}_\delta(A)$. Если $\lim\limits_{X\to A} \varphi(X) = 0$, то и $\lim\limits_{X\to A} f(X) = 0$.

Примеры

12. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x^2 + y^2)^d = 0$, если $d > 0$.

Решение

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{2d}}$. Пусть $(x, y) \in O_\delta(0,0)$, тогда

$$(x^2 + y^2)^d < \delta^{2d} < \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x^2 + y^2)^d = 0. \blacktriangle$$

13. Показать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}} = 0$, если $\alpha+\beta-2\gamma>0$.

Решение

Так как

$$|x| < \sqrt{x^2+y^2}, \quad |y| < \sqrt{x^2+y^2},$$

то при $x^2+y^2>0$ имеем неравенства

$$0 \le f(x,y) = \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}} \le \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{(x^2+y^2)^{\gamma}} = (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2}} = \varphi(x,y).$$

В силу примера 12 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varphi(x,y) = 0$, так как $\alpha+\beta-2\gamma>0$. Применяя лемму 1, получаем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0. \ \blacktriangle$$

14. Функция $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Решение

Рассмотрим последовательность точек $X_k\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,\ldots$. Тогда $f(x_k,y_k)=1$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k)=1$. Если же взять последовательность точек $X'_k\left(\dfrac{1}{k},\ -\dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,\ldots$ то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_k,y'_k)=-1$. Так как при любом $k\in\mathbf{N}$ точки (x_k,y_k) и (x'_k,y'_k) не совпадают с точкой $(0,0)$, а последовательности точек (x_k,y_k) и (x'_k,y'_k) сходятся к точке $(0,0)$, то, используя второе определение предела, получаем, что функция $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

▲

15. Функция $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Решение

Повторяя рассуждения примера 3, построим две последовательности точек $X_k\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right)$, $k=1,2,\ldots$ и $X'_k\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k^2}\right)$, $k=1,2,\ldots$. Так как $(x_k, y_k)\to(0,0)$ и $(x'_k, y'_k)\to(0,0)$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k)=0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_k, y'_k)=1$, то двойной предел функции $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ при $(x,y)\to(0,0)$ не существует. ▲

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности $\dot{O}_\delta((x_0,y_0))$. Пределом функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) **по направлению** $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ будем называть выражение

$$\lim_{t\to+0} f(x_0+t\cos\alpha,\ \ y_0+t\sin\alpha)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in\dot{O}_\delta(x_0,y_0)\cap L}} f(x,y)$$

где L есть луч, выходящий из точки (x_0,y_0) в направлении l.

16. Показать, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ в точке $(0,0)$ по любому направлению $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ существует и равен $\sin 2\alpha$.

Решение

Так как при $t>0$ выполнено равенство

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha,$$

то

$$\lim_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha. ▲$$

17. Показать, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ в точке $(0,0)$ по любому направлению $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ существует и равен нулю.

Решение

При $t>0$ справедливо равенство

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\frac{2t\sin\alpha\cos^2\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}.$$

Если $\sin\alpha=0$, то $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$. Если $\sin\alpha\neq 0$, то

$$\lim_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0\ \blacktriangle$$

Ясно, что из существования $\lim\limits_{X\to A,\ X\in\mathsf{M}} f(X)$ следует существование $\lim\limits_{X\to A,\ X\in\mathsf{M}'} f(X)$ для любого подмножества $\mathsf{M}'\subset\mathsf{M}$, для которого A есть предельная точка. В частности, из существования двойного предела функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ следует существование предела функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по любому направлению и равенство этих пределов двойному пределу функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Из результатов примеров 15 и 17 следует, что из существования и равенства пределов по любому направлению в точке (x_0,y_0) не вытекает существование в этой точке предела функции.

Предел функции $f(X)$ в точке $X_0\in R^n$ по направлению $l=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$, где $\boldsymbol{l}_1^2+\boldsymbol{l}_2^2+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{n}}^2=1$, определяется по аналогии со случаем функции двух переменных.

Упражнение

Пусть выполнены следующие условия:

а) множества $\mathsf{M}_i\subset R^n$, $i-1,2,\ldots,N$;

б) X_0 есть предельная точка каждого из множеств M_i, $i-1,2,\ldots,N$;

в) функция $f(X)$ определена на множестве $\mathfrak{M}=\bigcup\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}}\mathfrak{M}_{\boldsymbol{i}}$.

Доказать, что $b=\lim\limits_{X\to A,\ X\in\mathsf{M}} f(X)$ в том и только в том случае, когда $b=\lim\limits_{X\to A,\ X\in\mathsf{M}_i} f(X)$, $i=1,2,\ldots,N$ ▶

Упражнение

Показать, что результат упражнения 1 не допускает обобщения на тот случай, когда множество M есть объединение бесконечного множества множеств $\bigcup\limits_{\alpha}\mathsf{M}_{\alpha}$.►

Указание. Проанализируйте еще раз результат примеров 15 и 17.

4.3. Повторные пределы

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена на множестве

$$\Pi=\{(x,y):\quad 0<|x-x_0|<a,\quad 0<|y-y_0|<b\}.$$

Допустим, что $\forall x\in(x_0-a,\ \ x_0+a),\ \ x\neq x_0$, существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$, а функция $g(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0. Если существует

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

то этот предел называется **повторным.**

Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Как показывают простые примеры, из существования двойного предела не следует существование повторных пределов, а из существования и равенства повторных пределов не следует существование двойного предела.

Примеры

18. Для функции $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ примера 14 двойной предел при $(x,y)\to(0,0)$ не существует, но оба повторных предела равны нулю, так как

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(x,y)=0.▲$$

19. Для функции

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & \text{если} \quad y\neq 0,\\ 0, & \text{если} \quad y=0 \end{cases}$$

справедливо неравенство $|f(x,y)|\leq |x|$. В силу леммы 1 двойной предел этой функции при $(x,y)\to(0,0)$ равен нулю. Но при $x\neq 0$ не существует

$$\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$$

а поэтому не существует и соответствующий повторный предел. ▲

Упражнение

Пусть функция $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности точки (x_0,y_0) и существует двойной предел функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Доказать, что в том случае, когда в проколотой окрестности точки y_0 определена функция $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, будет существовать и повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, причем он равен двойному пределу.▶

Бесконечные пределы для функций многих переменных определяются по той же схеме, что и для функций одной переменной. Например, $\lim\limits_{X\to A} f(X)=+\infty$, если для любого действительного числа C найдется такое действительное число $\delta>0$ такое, что $\forall X\in \dot{O}_\delta(A)$ выполнено неравенство $f(X)>C$.

Пример 20. Показать, что

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$$

Решение

Так как при $\boldsymbol{x}>0$, $\boldsymbol{y}>0$ справедливо неравенство

$$0\leq (x^2+y^2)e^{-(x+y)}\leq (x+y)^2 e^{-(x+y)}$$

и $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t}=0$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ такое, что $\forall t>\delta$ выполнено неравенство $t^2e^{-t}<\varepsilon$. Но тогда $\forall x>\dfrac{\delta}{2}$ и $\forall y>\dfrac{\delta}{2}$ справедливо неравенство

$$0 \le (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} < \varepsilon . \blacktriangle$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется проколотой δ - окрестность точки a?

2. Дайте предела по Коши и по Гейне. Разъясните эквивалентность двух определений предела – сформулируйте теорему и докажите ее.

3. Что называется частичным пределом функции в точке? Приведите пример функции, который не имеет предела, но имеет частичные пределы.

4. Когда число b называется пределом по Коши функции $f(x)$ в точке a по множеству B и как его обозначают?

5. Что называется пределом слева (справа) функции в точке? Что называется односторонними пределами? Приведите примеры.

6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существование предела связанное с существованием односторонних пределов функции.

7. Приведите локальные свойства функции, имеющий предел. Что называют свойством сохранения знака предела?

8. Приведите свойства пределов, связанные с неравенствами.

9. Какую функцию называют бесконечно малой? Какими свойствами обладают бесконечно малые функции?

10. Приведите свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.

11. Сформулируйте теорему о существование односторонних пределов у монотонной функции. Приведите следствие и этой теоремы.

12. Когда говорят, что функция удовлетворяет в точке условию Коши?

13. Приведите критерий Коши существования предела функции.

34. В каком случае вычисление предела называют «раскрытием неопределенности» вида $\frac{0}{0}$? Что делают в этом случае для раскрытия неопределенности?

35. В каком случае говорят, что их частное и разность двух функций представляют собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty-\infty$ соответственно? Что делают обычно для раскрытия неопределенностей таких типов?

36. Когда две функции называют эквивалентными (асимптотически равными)? Как это обозначается?

37. Какими свойствами обладает отношение эквивалентности функций?

38. Приведите необходимое и достаточное условие эквивалентности двух функций?

39. В каких случаях обычно используют понятие эквивалентности?

40. Как производится замена функций эквивалентными функциями при вычислении пределов? Сформулируйте теорему.

41. Дайте предела функции многих переменных по Коши и по Гейне. Разъясните эквивалентность двух определений предела.

42. Что называют двойным пределом?

43. Что называется пределом функции в точке по направлению?

44. Из существования $\lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathrm{M}} f(X)$ следует ли существование $\lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathrm{M}'} f(X)$ для любого подмножества $\mathrm{M}'\subset \mathrm{M}$, для которого A есть предельная точка?

45. Следует ли из существования двойного предела функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ существование предела функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по любому направлению и равенство этих пределов двойному пределу функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$?

46. Вытекает ли из существования и равенства пределов по любому направлению в точке (x_0,y_0) существование в этой точке предела функции?

47. Что называют повторным пределом?

48. Приведите простые примеры, которые показывают, что из существования двойного предела не следует существование повторных пределов, а из существования и равенства повторных пределов не следует существование двойного предела.

ЛИТЕРАТУРА

4. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. **Mathematics for Economics.** Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England. 2001. - 1130 p. **(67 – 106; 114 - 143)**

5. Бабаджанов Ш.Ш. **Высшая математика. Часть II**. Учебное пособие. Т.: «IQTISOD MOLIYA», 2015. – 420 с.

6. Малыхин В.И. **Высшая математика.** Учебное пособие. 2- е изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2009. - 365 с.

3. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

План:

1. Определение производной

2. Экономический смысл производной: предельные величины в экономике, эластичность функции (относительная производная).

3. Дифференцируемость и дифференциал функции

4. Геометрический смысл производной и дифференциала

5. Правила вычисления производных и дифференциалов

6. Производные и дифференциалы высших порядков

Ключевые слова исловосочетания:

Производная, предельные (маржинальные) величины, эластичность функции (относительная производная), дифференцируемость функции, дифференциал функции

1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть существует конечный предел отношения

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$. Тогда этот предел называется **производной функции** $f(x)$ **в точке** x_0 и обозначается $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $y'_x(x_0)$ или $y'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Согласно определению производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Если в некотрой точке x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty \quad (+\infty,\ -\infty)$$

и функции $f(x)$ непрерывеа в точке x_0, то говорят о наличии у функции в точке x_0 **«бесконечной производной»** $f'(x_0) = \infty \ (+\infty,\ -\infty)$.

В случае, когда $f'(x_0) = +\infty$ и $f'(x_0) = -\infty$ говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $\boldsymbol{x_0}$ бесконечную производную (иногда добавляют: *определенного знака*).

Примеры

1. Функция $f(x) = x^2$ имеет конечную производную в каждой точке $x \in R^1$. Действительно, при любом $x \in R^1$ имеем

$$f'(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \ ▲$$

2. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ бесконечную производную. Действительно,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty$$

Покажем теперь случай, когда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ но, не выполняется ни одно из условий $f'(x_0) = +\infty$ и $f'(x_0) = -\infty$. В этом случае говорят, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *не является бесконечностью определенного знака.* Это имеет место, если

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \text{ а } \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty. \ ▲$$

3. Этим свойством обладает функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sqrt{|\boldsymbol{x}|}$ (рис. 1) в точке $\boldsymbol{x}_0=0$**,** так как $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=+\infty$, а $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty$. ▲

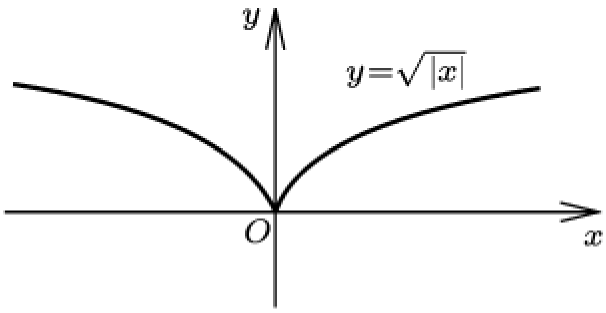

Рис. 1

Конечные или бесконечные пределы

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad\text{и}\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

называют сооттственно **левой и правой производными** функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Теорема 1. Функция $f(x)$ в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда только тогда, когда односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют и совпадают, т.е.

$$\boldsymbol{f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)}.$$

Пример 4. Функции $f(x)=|x|$ в не имеет производной в точке $x_0=0$, хотя в этой точке существуют конечные односторонние производные. Действительно, поскольку $\Delta y=|\Delta x|$ и поэтому

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1, \qquad f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

▲

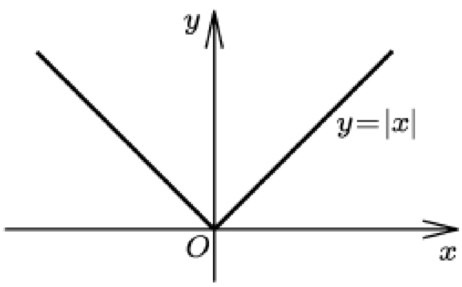

Рис. 2

Замечание. Так как $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ для функции $f(x) = |x|$, то непрерывная в точке $x_0 = 0$ функция $y = |x|$ не имеет производной в этой точке. Этот пример показывает, что из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 не следует существование ее производной в данной точке.

Упражнение. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

не имеет односторонних производных при $\boldsymbol{x}_0 = 0$.▶

Теорема 2. Функция $y = f(x)$ имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из равенства (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x), \tag{3}$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. А из (3) получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x). \tag{4}$$

Если $\Delta x \to 0$, то правая часть равенства (4) стремится к нулю, и поэтому $\Delta y \to 0$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Операция вычисления производной функции **называется дифференцированием.**

Ниже вычислим производные некоторых элементарных функций

Пример 5. Доказать, что функции $y = C$, $y = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ имеют производные в каждой точке $x \in R^1$, и найти эти производные.

Решение

а) Если $y = C$, C - постоянная, то $\Delta y = C - C = 0$ и поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т.е.

$$C' = 0. \tag{5}$$

б) Если $y = x^n$, где $n \in \mathbf{N}$, то

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1}(\Delta x) + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^{n-1} x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n =$$

$$= C_n^1 x^{n-1}(\Delta x) + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^{n-1} x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n,$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}$, т.е.

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

в) Если $y = \sin x$, то $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$. Так как $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции $\cos \boldsymbol{x}$, а $\frac{\sin t}{t} \to 1$ при $\boldsymbol{t} \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$, т.е.

$$(\sin \boldsymbol{x})' = \cos \boldsymbol{x}. \tag{7}$$

г) Если $\boldsymbol{y} = \cos \boldsymbol{x}$, то $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x$, т.е.

$$(\cos \boldsymbol{x})' = -\sin \boldsymbol{x}. \tag{8}$$

д) Если $y = a^x$, то $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a^x \ln a$ при $\Delta x \to 0$, так как $\frac{a^t - 1}{t} \to \ln a$ при $t \to 0$ в силу непрерывности функции $\cos \boldsymbol{x}$, а $\frac{\sin t}{t} \to 1$ при $t \to 0$.

Таким образом, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$, т.е. $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a. \tag{9}$$

Из формулы (9) при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$ получаем

$$e' = e^x. \ \blacktriangle \tag{10}$$

Замечание. Согласно формуле (10) производная показательной функции с основанием e совпадает с самой функцией. Этим объясняется тот факт, что в математическом анализе и его приложениях в качестве основания степени и основания логарифмов обычно используют число e.

Пример 6. Найти производную функции $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$.

Решение. Если $\boldsymbol{y} = \log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}$, то

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a(x) = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x},$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}$, так как $\frac{\log_a(1+t)}{t} \to \log_a e = \frac{1}{\ln a}$ при $t \to 0$.

Итак, если $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a} \neq 1$, $\boldsymbol{x} > 0$, то

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{11}$$

Из формулы (11) при $a = e$ получаем

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}. \; \blacktriangle \tag{12}$$

Теорема 3. Функция $y = f(x)$ имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из равенства (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x), \tag{13}$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. А из (13) получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x). \tag{14}$$

Если $\Delta x \to 0$, то правая часть равенства (14) стремится к нулю, и поэтому $\Delta y \to 0$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

2. Экономический смысл производной

Экономический смысл производной поясним на примерах.

2.1 Предельные величины в экономике. **Издержки производства $\boldsymbol{K}$** однородной продукции есть функция количества продукции $\boldsymbol{x}$. Поэтому можно записать:

$$K = K(x)$$

Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Продукции $x + \Delta x$ соответствуют издержки производства продукции

$$K(x + \Delta x)$$

Следовательно, приращению количества продукции $\boldsymbol{\Delta x}$ соответствует приращение издержек производства продукции

$$\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$$

Среднее приращение издержек производства есть

$$\frac{\Delta K}{\Delta x}.$$

Это есть приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.

Предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x). \qquad (*)$$

называется **предельными издержками производства.**

Аналогично, если мы обозначим через $U(x)$ выручку от продажи x единиц товара.

Предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = U'(x). \qquad (**)$$

мы будем называть **предельной выручкой.**

Пример 7. Издержки производства K зависят от объема продукции x по формуле

$$K = 100x - \frac{1}{30}x^3.$$

Определить предельные издержки, если объем производства составляет: а) 5 единиц; б) 10 единиц продукции.

Решение. Имеем:

$$K' = 100 - \frac{1}{10}x^2,$$

откуда

$$K'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97{,}5; \quad K'(10) = 100 - \frac{1}{10}10^2 = 90.$$

Это означает, что при объеме производства в 5 единиц продукции издержки по изготовлению следующей (шестой) единицы продукции составят 97,5; при объеме производства в 10 единиц они составят 90. ▲

Пример 8. Функция цен спроса на какой-либо товар определяется формулой

$$p = 10 - 2x,$$

где x - спрос, p - цена.

Выручка от продажи товара есть

$$u = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2,$$

откуда $u' = 10 - 4x^2$. Если, например, $x = 2$, то $u'(2) = 2$. Это означает, что если спрос возрастет с 2 до 3 единиц, то выручка возрастет приблизительно на 2 единицы. ▲

Упражнения

1. Зависимость между издержками продукции y и объемом выпускаемой продукции x на предприятии выражается функцией $y = 10x + 50$. Определить предельные издержки при объеме продукции $x = 100$ единиц. ►

2. Зависимость издержек производства одного из предприятий от объема выпускаемой продукции x выражается формулой

$$y(x) = 40x - 0{,}03x^3.$$

Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $x = 15$ ден. ед. ►

Как видно,

предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение экономического объекта.

Таким образом,

предельная величина выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса).

Теоретический анализ разнообразных явлений экономики использует ряд других предельных величин кроме, выше рассмотренных. Перечислим некоторые из них: **предельная стоимость, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению.** Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной.

В экономической теории предельные (маржинальные) величины $y'(x)$ принято обозначать через $\mathrm{M}y(x)$. Буква M первая буква английского слова **marginal «маржинальный»** (переводится на русский язык словом предельный»).

Определение предельных величин с помощью понятия производной позволяет использовать математический аппарат для доказательства экономических законов.

Рассмотрим некоторые применения дифференциального исчисления в экономической теории.

Пусть x количество реализованного товара. $R(x)$- функция дохода, $C(x)$ - функция издержек (затрат на производство товара). Вид этих функций зависит от способа производства, оптимизации инфраструктуры и т. п. Обозначим функцию прибыли через $\Pi(x)$. Тогда

$$\Pi(x) = R(x) - C(x).$$

Очевидно, оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т. е. такое значение выпуска x, при котором функция $\Pi(x)$ имеет максимум. По теореме Ферма в этой точке

$$\Pi'(x)=0.$$

Но $\Pi'(x)=R'(x)-C'(x)$. Поэтому $R'(x)=C'(x)$, т.е. если уровень выпуска x является оптимальным для производителя, то $\mathrm{M}R(x)=\mathrm{M}C(x)$, где $\mathrm{M}R(x)$ - предельный доход, а $\mathrm{M}C(x)$ - предельные издержки.

Получили известное в микроэкономике утверждение:

Для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны.

Использование в конце XIX в. предельных (маржинальных) величин полностью изменило способы анализа и предмет экономической теории. Экономисты для вывода экономических законов стали охотно прибегать к математическим доказательствам. Произошедшие в результате этого изменения были столь значительны, что их впоследствии назвали ***маржиналистской революцией***.

Упражнения

1. Объем продаж видеомагнитофонов задается следующей функцией времени:

$$V(t)=5000+1000t-100t^2$$

где t-время, измеряемое в месяцах,

V - количество видеомагнитофонов, проданных за месяц.

Найти скорость изменения объема продаж в момент времени:

а) $t=0$; б) $t=3$; в) $t=6$. ▶

2. Население некоторой страны растет по следующему закону:

$$P(t)=100000(1+t^2),$$

где время t- измеряется в годах. Найти скорость изменения населения в момент времени:

а) $t=0$; б) $t=2$; в) $t=5$. ▶

3. Эпидемия медленно распространяется среди населения . Число заболевших определяется формулой

$$A(t)=200(t^{\frac{5}{2}}+t^2)$$

где t- число недель, прошедших с момента начала эпидемии.

Найти скорость изменения числа заболевших в момент времени:

а) $t=1$; б) $t=4$; в) $t=9$. ▶

4. Предположим, что издержки получения питьевой воды заданы формулой

$$C=\frac{10000}{p}-100.$$

где p - процентное содержание загрязняющих воду примесей.

Найти скорость изменения издержек производства, если примеси составляют 5%.▶

2.2. Эластичность функции (относительная производная). Как уже заметили с помощью производной можно вычислить приращение зависимой переменной, соответствующее приращению независимой переменной. Во многих задачах, особенно экономических, удобнее вычислить процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующее проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию **эластичности функции (иногда ее называют относительной производной).**

Понятие эластичности было введено Альфредом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Впоследствии это понятие было распространено и на другие функции.

Пусть дана функция $y=f(x)$. Предположим, что приращение независимой переменной x есть Δx.

Эластичностью функции $y=f(x)$ называется следующий предел

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right) \qquad (***)$$

Говорят также, что $E_x(y)$ - это *коэффициент эластичноти* y по x.

Из определения эластичности вытекает, что при достаточно малых Δx выполняется приближенное равенство

$$E_x(y)\approx\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right),$$

Замечание. Эластичность $E_x(y)$ - это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y по x. Если, например, x увеличится на один процент, то y увеличится (приближенно) на $E_x(y)$ процентов.

Теоретический и практический интерес представляют производственные функции с постоянной (отличной от единицы) эластичностью замещения труда производственными фондами и с постоянной (переменной) отдачей на единицу масштаба производства.

Примерно такого рода функций является функция ***CES (Constant Elasticity of Substitution)***

$$y = C_0\left[CL^{-p} + (1-C)K^{p}\right]^{-1/p},$$

для которой эластичность замещения равна $\dfrac{1}{1-p} \neq 1$; p, C_0 и C - постоянные.

Примеры

9. Правильное применение знаний о коэффициентах эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов.

Пусть x акцизы на некоторое импортное ювелирное изделие, y - спрос на этот товар. Предположим, что государство предполагает повысить акцизы на это изделие на 10%. Если известно, что эластичность спроса составляет $E_x(y) = -0{,}2$, то следует ожидать, что это вызовет снижение спроса на данный товар на $0{,}2 \cdot 10$ = 2 (%) и доходы государства по продаже импортного ювелирного изделия повысятся на 8%. ▲

10. Изучение эластичности важно и для оценки изменения ситуации на рынке товаров и услуг в результате повышения доходов населения. Известно, что для мяса, масла и яиц эластичность спроса относительно доходов населения положительна, а для муки - отрицательна. Это означает, что с ростом дохода спрос на мясо, масло и яйца увеличивается, а на муку - понижается. Обратно, понижение доходов населения приводит к понижению закупок мяса, яиц, масла и увеличению закупок муки. Связано это с тем, что снижение доходов влечет за собой и уменьшение возможности покупки дорогостоящих продуктов. Вместо этих продуктов, например мяса, население покупает более дешевый продукт, т. е. муку или хлеб. ▲

11. Пусть заданы функции спроса y и предложения (количества товаров предлагаемого в единицу времени) z от цены x:

$$y = 10 - x, \qquad z = 3x - 6.$$

Найти:

а) цену равновесия при которой спрос и предложение уравновешиваются;

б) эластичность спроса и предложения для цены равновесия.

Решение

а) Цена равновесия находится из условия $y(x)=z(x)$, или $10-x=3x-6$, откуда $x=4$;

б) эластичность спроса $E_x(y)$ и предложения $E_x(z)$ находим по формуле (***). Имеем

$$y=10-x;$$

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=10-(x+\Delta x)-(10-x)=-\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{-\Delta x}{10-x}:\frac{\Delta x}{x}=-\frac{x}{10-x},$$

откуда

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{x}{10-x}\right)=-\frac{x}{10-x}.$$

Аналогично имеем

$$z=3x-6;$$

$$\Delta z=z(x+\Delta x)-z(x)=3x+3\Delta x-6-(3x-6)=3\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{z}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{3\Delta x}{3x-6}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{3x}{3x-6},$$

следовательно

$$E_x(z)=\frac{x}{x-2}.$$

Таким образом, при $x=4$ получаем

$$E_x(y)=-\frac{4}{10-4}=-\frac{2}{3},\quad E_x(z)=\frac{4}{4-2}=2.$$

Это означает, что при цене равновесия между спросом и предложением увеличение цены на 1% влечет уменьшение спроса на (2/3)% и возрастание предложения на 2%. ▲

Замечание. Коэффициент эластичности широко используют в исследованиях потребительского спроса на товары в зависимости от цен этих товаров или доходов потребителей. Высокий коэффициент эластичности означает слабую степень удовлетворения потребности; низкий указывает на то, что данная потребность высока.

Упражнения

1. Найти эластичность функции спроса:

а) $\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{x}=100$ в точке $p=50$;

б) $3\boldsymbol{p}+4\boldsymbol{x}=120$ в точках $p=15$ и $p=20$;

в) $\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{p} + 4\boldsymbol{x} = 40$ в точках $p = 2$ и $p = 4$.

Как увеличение цены повлияет на выручку? При каких значениях p спрос является эластичным? ▶

2. Найти эластичность функции спроса $xp = 5$ в точке $p = 10$. Как увеличение цены повлияет на выручку? Какой это тип эластичности? ▶

3. Для следующих функций спроса найти значения p при которых спрос является эластичным:

а) $2\boldsymbol{p} + 3\boldsymbol{x} = 12$;

б) $\boldsymbol{x} = 50(10 - \sqrt{\boldsymbol{p}})$;

в) $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a} < 0, \boldsymbol{b} > 0)$. ▶

4. Функция спроса имеет вид $\boldsymbol{p} = \sqrt{3600 - \boldsymbol{x}^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 50$.

б) Посчитать приближенно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%. ▶

5. Уравнение спроса имеет вид $\boldsymbol{p} = 20 - 0{,}1\sqrt{\boldsymbol{x}}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 18$.

б) Вычислить приближенно процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%. ▶

6. Уравнение спроса имеет вид $\boldsymbol{p} = 100\sqrt{4 - \boldsymbol{p}}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 150 единиц;

б) 50 единиц. ▶

7. Уравнение спроса имеет вид $(\boldsymbol{p} + 1)\sqrt{\boldsymbol{x} + 1} = 100$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы;

б) 15 единиц. ▶

8. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу товара, максимизирующее доход государства:

а) $\begin{array}{l} \boldsymbol{p} = -3\boldsymbol{x} + 124, \\ \boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{x} + 14; \end{array}$ б) $\begin{array}{l} \boldsymbol{p} = 250 - 2\boldsymbol{x}^2, \\ \boldsymbol{p} = 700 + 3\boldsymbol{x}. \end{array}$ ▶

9. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $\begin{array}{l} \boldsymbol{p} = 800 - 0{,}5\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{p} = 700 + 2\boldsymbol{x}; \end{array}$ б) $\begin{array}{l} \boldsymbol{p} = 8200 - 5\boldsymbol{x}^2, \\ \boldsymbol{p} = 700 + 20\boldsymbol{x}^2. \end{array}$ ▶

3. Дифференцируемость и дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ определена в δ - окрестности точки x_0, а приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x), \tag{15}$$

где $A = A(x_0)$ не зависит от Δx, а $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция f называется **дифференцируемой в точке** x_0, а произведение $A \cdot \Delta x$ называется **ее дифференциалом в точке** $\boldsymbol{x_0}$ и обозначается $df(x_0)$ или dy. Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \qquad \text{при} \quad \Delta x \to 0, \tag{16}$$

где

$$dy = A \cdot \Delta x. \tag{17}$$

Отметим, что приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно рассматривать только для таких Δx, при которых точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции f, в то время как дифференциал dy определен при любых Δx.

Пример 9. Функция $y = x^2$ дифференцируема при любом x, так как $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^2 = 2x \cdot (\Delta x) + o(\Delta x)$. При этом $dy = 2x\,dx$. ▲

Теорема 4. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела производную в точке x_0. При этом дифференциал и производная связаны равенством

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{18}$$

Доказательство. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выполняется условие (19), и поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $(\Delta x \neq 0)$, откуда следует, что существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$, т. е. существует $f'(x_0) = A$.

Обратно, если существует $\boldsymbol{f'(x_0)}$, то справедливо равенство (14), и поэтому выполняется условие (15). Это означает, что функция f дифференцируема в точке $\boldsymbol{x = x_0}$, причем коэффициент $\boldsymbol{A}$ в формулах (15) к (17) равен $f'(x_0)$, и поэтому дифференциал записывается в виде (18).■

Таким образом, существование производной функции в данной точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке.

Функцию, имеющую производную в каждой точке интервала (a,b) называют **дифференцируемой на интервале** (a,b).

Если функция f дифференцируема на интервале (a,b) и, кроме того, существуют $f'_{+}(a)$, и $f'_{-}(b)$, то функцию f **называют дифференцируемой на отрезке** $[a,b]$.

Замечание. Если $\boldsymbol{f'(x_0) \neq 0}$, то из равенств (20) и (22) следует, что $\boldsymbol{dy \neq 0}$ при $\boldsymbol{\Delta x \neq 0}$ и

$$\Delta y \sim dy, \qquad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

В этом случае говорят, что дифференциал есть **главная линейная часть приращения функции,** так как дифференциал есть линейная функция от Δx и отличается от Δy на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx.

Замечание. Приращение Δx часто обозначают символом dx и называют **дифференциалом независимого переменного.** Поэтому формулу (18) записывают в виде

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{19}$$

По формуле (19) можно найти дифференциал функции, зная ее производную.

Например, $d\sin x = \cos x dx$, $de^x = e^x dx$.

Из формулы (19) получаем

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}. \tag{20}$$

Согласно формуле (20) производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Отбрасывая в формуле (15) член $\beta = \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$, т. е. заменяя приращение функции ее дифференциалом, получаем приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{21}$$

Формулу (21) можно использовать для вычисления приближенного значения $f(x_0 + \Delta x)$ при малых Δx, если известны значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$.

Пример 10. Найти с помощью формулы (21) приближенное значение функции $y=\sqrt[4]{x}$ при $x=90$.

Решение. Полагая в формуле (21) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $x_0=81$, $\Delta x=9$ и учитывая, что $f(x_0)=\sqrt[4]{81}=3$, $f'(x)=\dfrac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0)=\dfrac{1}{4\cdot 3^3}$ поручаем $\sqrt[4]{90}\approx 3+\dfrac{1}{12}$, т.е. $\sqrt[4]{90}\approx 3{,}083$. ▲

4. Геометрический смысл производной и дифференциала

Касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$ называют предельное положение секущей MN при произвольном стремлении точки N к точке M по графику функции (или, что то же самое, при $dx\to 0$) (рис. 3).

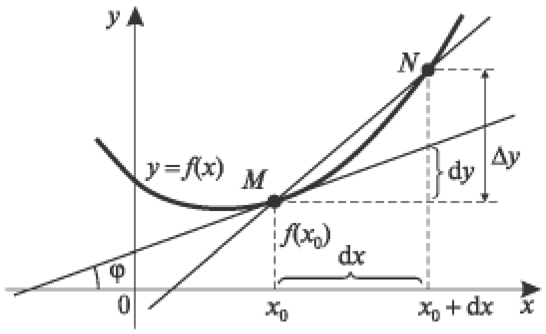

Рис. 3

Значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 определяется *угловым коэффициентом касательной*, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$, т.е. $f'(x_0)=tg\varphi$, где φ - угол между положительным направлением оси Ox и касательной, отсчитываемый против часовой стрелки (см. рис. 3).

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$ имеет вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Если $f'(x_0)=\infty$ $(-\infty,\ +\infty)$, то касательная к графику непрерывной функции $f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$перпендикулярна оси Ox (вертикальная касательная).

Уравнение такой касательной имеет вид $x=x_0$.

Величина дифференциала dy в точке x_0 равна *приращению ординаты касательной* к графику $f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$ при переходе от точки x_0 к точке (x_0+dx) (см. рис. 3).

Примеры

11. Написать уравнение касательно к графику функции $f(x)=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0=4$.

Решение

Имеем

$$f(x_0)=\sqrt{4}=2,\qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$ или $y=\frac{1}{4}x+1$ (рис. 4). ▲

12. Касательная графику функции $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $O(0,0)$ будет вертикальной, так как данная функция непрерывна при $x=0$, а $f'(0)=+\infty$ (рис.5). ▲

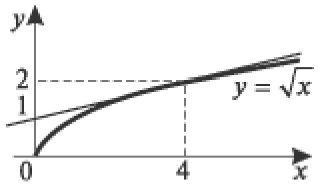

Рис. 4

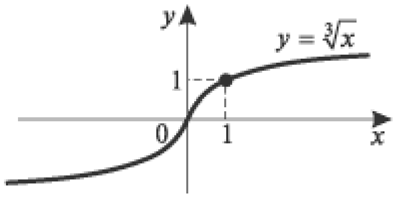

Рис. 5

5. Правила вычисления производных и дифференциалов

5.1. Дифференцирование суммы, произведения и частного. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые в точке x и пусть k - постоянная. Тогда:

1. $[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$; $\qquad d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$.

2. $[kf(x)]' = kf'(x)$; $\qquad d[kf(x)]=k\,df(x)$.

3. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$; $\quad d(f(x)g(x))=df(x)g(x)+f(x)dg(x)$.

4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$; $\quad d\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{df(x)g(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}$ $(g(x)\neq 0)$.

Дадим теперь сводку формул для производных элементарных функций.

1) $(C)'=0,\quad C=const.$

2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},\quad \alpha\in R^1,\quad x>0,\qquad (x^n)'=nx^{n-1},\quad n\in N,\quad x\in R^1$

3) $(a^x)'=\alpha^x\ln a,\quad \alpha>0,\quad a\neq 1,\quad x\in R^1,\qquad (e^x)'=e^x,\quad x\in R^1$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \neq 0.$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0.$

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0.$

5) $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R^1.$

6) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R^1.$

7) $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

8) $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z.$

9) $(\arcsin \boldsymbol{x})' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{x}^2}}, \quad |\boldsymbol{x}| < 1.$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$

11) $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad x \in R^1.$

12) $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad x \in R^1.$

13) $(sh\, x)' = ch \quad x, \quad x \in R^1.$

14) $(ch\, x)' = sh \quad x, \quad x \in R^1.$

15) $(th\, x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R^1.$

16) $(cth\, x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

Пример

13. Вычислить производную функции $y = \dfrac{e^x + 4x^3}{\ln x}$.

Решение

Применения правила и сводку производных, имеем

$$y' = \frac{\left(e^x + 4x^3\right)' \ln x - \left(e^x + 4x^3\right)(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\left(e^x + 12x^2\right)\ln x - \dfrac{e^x + 4x^3}{x}}{\ln^2 x}. \ \blacktriangle$$

14. Для функции $y = a^x arctg\, x$ ее производная

$$y' = \left(a^x\right)' arctg\, x + a^x \left(arctg\, x\right)' = a^x \cdot \ln a \cdot arctg\, x + \frac{a^x}{1+x^2}. \ \blacktriangle$$

5.2. Дифференцирование сложной функции. Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = g(x_0)$, то *сложная функция* $y = \Phi(x) = f(g(x))$ также дифференцируема в точке x_0, причем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \qquad \text{или } \Phi'(x_0) = f'(u_0) g'(x_0)$$

Справедливо равенство

$$dy = \Phi'(x_0) dx = f'(u_0) du,$$

где $du = g'(x_0)dx$, т.е. дифференциал равен произведению производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной независимо от того, является ли эта переменная независимой или функцией другой переменной **(инвариантность формы первого дифференциала).**

Примеры

15. Производная функции $y = 3^{\cos^5 2x}$ равна

$$y' = 3^{\cos^5 2x} \ln 3 \left(\cos^5 2x\right)' = 3^{\cos^5 2x} \ln 3 \cdot 5 \cos^4 2x (\cos 2x)' =$$

$$5 \ln 3 \cdot 3^{\cos^5 2x} \cos^4 2x(-\sin 2x)(2x)' = -10 \ln 3 \cdot \sin 2x \cos^4 2x \cdot 3^{\cos^5 2x}. \blacktriangle$$

16. Дифференциал функции $y = tg^4 6x$ равен

$$dy = 4tg^3 6x d(tg\, 6x) = 4tg^3 6x \frac{1}{\cos^2 6x} d(6x) = \frac{24 tg^3 6x}{\cos^2 6x} dx = \frac{24 \sin^3 6x}{\cos^5 6x} dx. \ \blacktriangle$$

17. Вычислить производную функции $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$, $\quad (x < 1)$.

Решение

Предварительно преобразуем эту функцию к виду

$$y = \frac{1}{4} \ln\left(1 + x^2\right) - \frac{1}{4} \ln(1 - x).$$

Тогда

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{1-x} = \frac{2x + 1 - x^2}{4(1-x)\left(1+x^2\right)}. \ \blacktriangle$$

5.3. *Логарифмическое дифференцирование.* Прием логарифмического дифференцирования используется в том случае, когда функция имеет вид, удобный для логарифмирования, и сводится к следующей схеме:

а) заменяют функцию y на функцию $|y|$;

б) логарифмируют выражение $|y|$;

в) находят производную от $\ln|y|$ $\left((\ln|y|)' = y'/y\right)$;

г) находят y'.

Примеры

18. Для функции $y=(\cos x)^{\sin x}$, $(\cos>0)$ имеем $|y|=y$ и, следовательно,

$$\ln y = \sin x \ln(\cos x).$$

Тогда $\dfrac{y'}{y}=\cos x\ln(\cos x)+\sin x\dfrac{-\sin x}{\cos x}$, откуда

$$y'=(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]. \blacktriangle$$

19. Для функции $y=\sqrt[5]{\dfrac{\sin 5x}{1-\sin 5x}}$ имеем

$$\ln|y|=\frac{1}{5}\ln|\sin 5x|-\frac{1}{5}\ln|1-\sin 5x|.$$

Тогда $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\cos 5x}{\sin 5x}\cdot 5-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{-5\cos 5x}{1-\sin 5x}=\dfrac{ctg\,5x}{1-\sin 5x}$, откуда

$$y'=\sqrt[5]{\frac{\sin 5x}{1-\sin 5x}}\cdot\frac{ctg\,5x}{1-\sin 5x}. \blacktriangle$$

Упражнения

1. Найти производную показательно-степенной функции $z=u(x)^{v(x)}$, где u, v - функции, дифференцируемые в точке x, причем $u(x)>0$. ►

2. Найти $f'(x)$, $g'(x)$, если:

а) $f(x)=x^x$; *б*) $g(x)=x^{x^x}$. ►

3. Пусть функция f дифференцируема на интервале $(-a, a)$. Доказать, что если $f(x)$ - четная функция, то ее производная $f'(x)$ - нечетная функция, а если $f(x)$ - нечетная функция, то $f'(x)$ - четная. ►

6. Производные и дифференциалы высших порядков

Если функции $f(x)$ определена производная $y^{(n-1)}$ порядка $(n-1)$, ***производную*** $y^{(n)}$ ***порядка*** n (при условии ее существования) определяют как производную от производной порядка $(n-1)$, т.е. $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

В частности, $y'' = (y')'$ - производная второго порядка, $y''' = (y'')'$ - производная третьего порядка и т.д. Другие обозначения производных высших порядков: $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, y^{IV}, y''_{xx}, $f^{(n)}(x)$.

При вычислении производных высших порядков используют те же правила, что и для вычисления y'. Например, если $y = e^{x^2}$, то

$$y' = e^{x^2} \cdot 2x,$$

$$y'' = \left(e^{x^2}\right)' \cdot 2x + e^{x^2}(2x)' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = 2e^{x^2}\left(2x^2+1\right).$$

Дифференциалы высших порядков функции $y = f(u)$ последовательно определяют таким образом:

$d^2 y = d(dy)$ - дифференциал второго порядка,

$d^3 y = d\left(d^2 y\right)$ - дифференциал третьего порядка, … .

Вообще, $d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)$ - дифференциал n-го порядка.

При этом если $y = f(u)$ и u независимая переменная или линейная функция $u = kx + b$ переменной x, то

$$d^2 y = y''(du)^2;\ d^3 y = y'''(du)^3;\ \dots;\ d^n y = y^{(n)}(du)^n.$$

Если же $y = f(u)$, где $u = g(x) \neq kx + b$, то $d^2 y = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2 u$ и т.д. **(свойство инвариантности формы не выполняется).** Например, для функции $y = 3u^5 - 4u^2 + 7$ ее первый дифференциал

$$dy = \left(15u^4 - 6u\right)du$$

независимо от того, является ли u независимой переменной или функцией другой переменной. В то же время дифференциал второго порядка будет равен:

$d^2 y = \left(60u^3 - 8\right)(du)^2$, если u - независимая переменная;

$d^2 y = \left(60u^3 - 8\right)(du)^2 + \left(15u^4 - 8u\right)d^2 u$, если u - функция другой переменной.

6.2. *Производная обратной функции.* Если дифференцируемая функция $y = f(x), (a < x < b)$ имеет непрерывную обратную функцию $x - y(u)$ и $y'_x \neq 0$, то существует *производная обратной функции* x'_y и имеет место равенство

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Дифференцируя последнее равенство по y и предполагая существование y''_{xx}, найдем

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2} x'_y = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

При соответствующих предположениях аналогично можно определить производные любого порядка обратной функции.

Например, для функции $y = a^x \left(a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0\right)$ обратной является функция $x = \log_a y$. Ее производная

$$x'_y = (\log_a y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\left(a^x\right)'_x} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Кроме того, так как $y''_{xx} = a^x (\ln a)^2$, то

$$x''_{yy} = -\frac{a^x (\ln a)^2}{(a^x \ln a)^3} = -\frac{1}{y^2 \ln a}.$$

6.3. *Производная параметрический заданной функции.* Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Систему соотношений $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, где $\alpha < t < \beta$, называют *параметрическим представлением функции* $y = f(x)$, если $\psi(t) - f((\varphi(t))$ для всех $t \in]\alpha, \beta[$.Переменная t называется в этом случае *параметром*.

Если функция $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - дифференцируемые и $\varphi'(t) \neq 0$, то существует производная y'_x параметрический заданной функции и

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Если, кроме того, существуют y''_{tt} и x''_{tt}, то

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

При соответствующих предположениях аналогично можно определить производные любого порядка параметрический заданной функции.

Например, если функция $y = f(x)$ задана параметрический соотношениями $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t\ (-\infty < t < \infty)$, где a и b - положительные постоянные, то $y'_t = 3b\sin^2 t\cos t,\ x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$. При $t \neq \pi k/2\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ производная $x'_t \neq 0$. Следовательно, при этих значениях t получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}tg\,t.$$

Далее,

$$y''_{xx} = \left(-\frac{b}{a}tg\,t\right)'_x = \left(-\frac{b}{a}tg\,t\right)' t'_x = -\frac{b}{a\cos^2 t}\cdot\frac{1}{x'_t} = \frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

6.4. ***Производная неявно заданной функции.*** Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y)$, то, дифференцируя тождество $F(x, f(x)) = 0$ по x (как сложную функцию), можно определить $f'(x)$. Дифференцируя выражения $f'(x)$ по x, можно определить $f''(x)$ и т.д.

Например, если функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением

$$arctg\, y - y + x = 0,$$

то, дифференцируя по x тождество

$$arctg\, f(x) = f(x) + x = 0,$$

найдем

$$\frac{f'(x)}{1+y^2} - f'(x) + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = f'(x) = 1 + y^{-2}.$$

Дифференцируя по x последнее равенство, получаем

$$y'' = f''(x) = 2y^{-3}y' = \frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение производной функции в заданной точке? Как она обозначается?

2. Когда говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную?

3. В каком случае говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную определенного знака?

4. Как вводятся понятия левой и правой производных? Что называют левой (правой) производной функции f в точке x_0 и как ее обозначают?

5. Что называется дифференцированием функции?

6. Верно ли обратная теорема к следующей теореме: Функция $y = f(x)$ имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

7. Что означает предельные величины в экономике?

8. Что называется предельными издержками производства?

9. Что называется предельной выручкой?

10. Разъясните понятие эластичности функции. Почему иногда ее называют относительной производной?

11. Где широко используется коэффициент эластичности?

12. Дайте определение дифференциала функции в точке x_0. В каком случае функция f называется дифференцируемой в точке x_0?

13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке $\boldsymbol{x}_0$. Каким равенством связаны дифференциал и производная ?

14. Дайте определение дифференцируемой функции на интервале $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

15. Дайте определение дифференцируемой функции на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

16. Почему говорят, что дифференциал есть главная линейная часть приращения функции?

17. Что называют дифференциалом независимого переменного? Напишите формулу, по которой можно найти дифференциал функции, зная ее производную.

18. Откуда можно получить приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ или $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, которое используется для вычисления приближенного значения $f(x_0 + \Delta x)$ при малых Δx при известных значений $f(x_0)$ и $f'(x_0)$?

19. Объясните геометрический смысл производной и дифференциала.

20. Приведите правила вычисления производных и дифференциалов.

21. Приведите правило дифференцирования обратной функции. Сформулируйте теорему. Покажите применения этого правила для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

22. Сформулируйте теорему, отражающую правило дифференцирования сложной функции. На композицию какого числа функций распространяется правило вычисления производной сложной функции.

23. Что называется инвариантностью формы первого дифференциала.

24. Дайте сводку формул для производных элементарных функций.

25. Что называют логарифмической производной функции дифференцируемой в точке?

26. Приведите правило дифференцирования функции заданной параметрически.

27. Как можно дифференцировать функцию заданную неявно?

28. Что называют второй производной или производной второго порядка функции в точке и как ее обозначают?

29. Выведите формулу для второй производной функции заданной параметрически.

30. Как решается вопрос о вычислении второй производной сложной функции?

31. Как находят вторую производную неявной функции в простейших случаях? Поясните это на примере.

32. Каким образом определяется производная n-го порядка? Как ее обозначают?

33. Что называют вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка функции в точке и как его обозначают?

34. Как определяется n-й дифференциал $d^n y$? Откуда следует, что производная n-го порядка функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ равна отношению дифференциала n-го порядка этой функции к n-й степени дифференциала независимого переменного т.е. $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$?

35. Дифференциал второго порядка, в отличии от первого дифференциала, не обладает свойством инвариантности формы. Разъясните, что это означает?

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. **Mathematics for Economics.** Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England. 2001. - 1130 p. **(143 – 226)**

2. Бабаджанов Ш.Ш. **Высшая математика. Часть II.** Учебное пособие. Т.: «IQTISOD MOLIYA», 2015. – 420 с.

3. Малыхин В.И. **Высшая математика.** Учебное пособие. 2- е изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2009. - 365 с.

4. ЗАДАЧА НА БЕЗУСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

План:

1. Введение

2. Постановка задачи нелинейного программирования

3.Задачи на безусловный минимум (минимизация функции многих переменных)

Нелинейным программированием *называют раздел математического программирования, в котором либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейные.*

1. Введение

1.1. Необходимость в методах нелинейного программирования. Даже самого краткого обзора простых, но все, же поучительных моделей линейного программирования, приведенных ранее, будет достаточно для того, чтобы вызвать у читателя сомнения в действительной адекватности строго линейных моделей многим реальным ситуациям.

Легко может создаться впечатления, что при линейном подходе попросту игнорируются такие явления как: эффективность или неэффективность укрупнения операций в многопродуктовых моделях; отсутствие аддитивности объемных показателей при составлении химических смесей; влияние объема реализации на цену реализации, а следовательно, на выручку от реализации.

Отметим, что при более глубоком исследовании в ряде задач появляются связи нелинейного характера, когда с изменением одного элемента другие элементы непропорциональны первому. Например, даже простейшая транспортная задача принимает нелинейный вид, если стоимость перевозки единицы груза зависит от их общего количества.

Если у читателя и создалось такое впечатление, приведенное ниже обсуждение позволит устранить возникшие недоразумение.

Имеется много данных об очень успешном применении моделей линейного программирования в условиях нелинейности. Поскольку любая модель неизбежно оказывается лишь приближением к реальности, возникает важный вопрос: «*в каких случаях* линеаризованный вариант является адекватным отображением нелинейного явления?» Следовательно, читатель должен научиться отличать условия, в которых непосредственное применение линейного программирования приемлемо, от условий, где оно неприемлемо.

Далее следует два примера, на основе которых можно судить о вероятной неадекватности линеаризованного варианта в некоторых реальных ситуациях.

Пример 1. Рассмотрим фирму, находящуюся на начальном этапе разработки модели перспективного планирования в масштабах всей фирмы. Специалист по управлению обычно знает, что даже опытному бизнесмену трудно дать точный и детальный прогноз оптимальных объемов производства фирмы и распространения ее контроля на рынки сбыта на последующие 10 и более лет. В самом деле, применение администратором такой модели в основном обусловлено именно тем, что он понимает, как легко ошибиться при использовании только лишь интуитивных соображений в стремлении оценить влияние экономических факторов в последующие периоды. Если затраты производства и выручка от реализации зависят от объема операции нелинейно, линеаризованные догадки могут оказаться недостаточными для получения надежных ответов. (Вместе с тем при многократном применении линейная модель может оказаться применимой, если только параметры модели значительно не меняются во времени.)

Пример 2. Этот пример относится к фирме, составляющей производственную программу с помощью динамической многопродуктовой модели, отображающей существенные затраты времени на наладку станков, ограниченную мощность отдельных групп оборудования, колеблющийся спрос. Обычно в таких случаях *сущность* оптимизационной задачи состоит в варьировании различных нелинейных факторов, влияющих на принимаемые решения, относительно производственной программы. Если только специалист, разрабатывающий программу, не имеет очень хорошего представления о характере оптимального решения, любая простая линеаризация задачи, вероятно, приведет к нарушению фундаментальных принципов оптимизации.

Однако даже если в данном конкретном случае может потребоваться построение нелинейной модели, иногда удается использовать метод решения, лишь немногим отличающийся от *метода решения* для линейной модели. Наряду с этим при существенной нелинейности в связи с ее спецификой или влиянием ее на характер модели приходится применять методы оптимизации, гораздо более сложные, чем симплексный алгоритм.

1.2. Значение нелинейных моделей для управления. В настоящее время применение математического программирования в преобладающем большинстве реальных ситуаций сводится к моделям линейной аппроксимации, а не к линейным моделям в явном их виде. Однако значимость нелинейного программирования и его использования постоянно возрастает. Это обусловлено быстро растущими познаниями руководителей и специалистов в части использования математических моделей, предназначенных для подготовки решений, а также все большей доступностью компьютерных программ решения нелинейных задач большой размерности.

В большинстве случаев нелинейности, которые необходимо отобразить в моделях, относятся к одной из двух категорий:

I) эмпирически наблюдаемые соотношения, такие, как непропорциональные изменения затрат, выхода продукции, показателей качества;

II) структурно полученные соотношения, к которым относятся постулируемые экономические явления, а также выведенные математически или установленные руководством правила поведения.

Очевидно, четкое разграничение этих двух категорий невозможно, поскольку при наличии достаточных данных можно вывести структурное соотношение, лежащее в основе эмпирически наблюдаемого явления.

Пример 3. Первым примером может служить тот случай, когда на предприятии в течение ряда лет прирост выпуска продукции отстает от роста затрат труда, тогда как темпы роста количества отходов его обгоняют.

Пример 4. Вторым примером является фирма которая должна оплатить счет за электроэнергию в случае, когда расчеты ведутся по нелинейной формуле, учитывающей как среднесуточный расход, так сведения о нелинейном характере затрат из договора о ставках оплаты, заключенного с компанией, обеспечивающей энергоснабжение.

Нелинейность «встраивается» в модели программирования и в других случаях, например, в следующих:

Пример 5. ***Приготовление бензиновых смесей.*** В модели приготовления бензина определенного состава из отдельных фракций, полученных в результате перегонки нефти, обычно имеется нелинейное ограничение на октановое число смеси, поскольку эта характеристика качества нелинейно зависит от количества добавляемого к смеси тетра – этилового свинца.

Пример 6. ***Управление производственным процессом.*** В модели металлургического завода значение переменной, характеризующей температуру в доменном печи, может количеству потребного тепла и временным показателям процесса. В свою очередь каждая из этих переменных входит в другие ограничения, а также в целевую функцию.

Пример 8. ***Выручка от реализации продукции.*** Спрос на продукцию компании может существенно зависеть от цен реализации: чем ниже цена продукта, тем больше объем реализации, несмотря на аналогичное снижение цен, производимое конкурентами. Следовательно, выручка от реализации продукции не изменяется пропорционально цене, и это обстоятельство должно быть отражено в целевой функции многопродуктовой модели с помощью нелинейного слагаемого. Для иллюстрации примем, что $x(p)$ есть объем реализации, зависящий от цены p; тогда выручка от реализации равна $p \cdot x(p)$. Пусть на представляющем для нас интерес интервале изменения p функция объема реализации от цены линейна, т.е. имеет вид $x(p) = ap + b$. Тогда слагаемые в целевой функции, относящиеся к выручке от реализации, являются квадратичным относительно управляющей переменной p и имеют вид $\left(a\,p^2 + b\,p\right)$.

Пример 9. ***Размер многопродуктового заказа.*** В моделях управления запаса обычно число продуктов бывает равно одному. Однако нередко оптовый покупатель пополняет свои запасы, заказывая у одного и того же поставщика одновременно несколько видов продукции. Тем самым достигается экономия на транспортных затратах, расходах по оформлению документации и скидке на размер заказа, представляемой поставщиком. Эта ситуация может рассматриваться на основе использования модели математического программирования большой размерности, в которой затраты на пополнения запасов являются нелинейно функцией нескольких переменных – размеров заказов отдельных продуктов.

Пример 10. ***Уровень страховых запасов.*** В большинстве моделей математического программирования, используемых для общефирменного планирования, длительность отрезков планового периода редко составляет менее трех месяцев и часто превышает год и более. В таких динамических, «многопериодных» моделях обычно предусматривается условие наличия страховых запасов, которые должны выполнять компенсатора колебаний еженедельного объема реализации. В этих моделях применяется, в частности, следующий подход: уровень страхового запаса предполагается зависимым как от прогнозированного объема реализации, так и от степени использования производственных мощностей, обусловленной этим прогнозом. Так, например, пусть c - максимально возможный недельный объем производства рассматриваемого продукта, s - прогнозированный *средненедельный* объем реализации этого продукта и $n \cdot s$ - уровень страхового запаса продукта, где n - число недель, зависимое от коэффициента использования производственных мощностей s/c. Для примера предположим, что администрация приняла следующую формулу расчета n: $n = m + f(s/c)$. Тогда уровень страхового запаса представляет собой квадратичную функцию прогнозированного среднедельного уровня реализации, имеющую следующий вид: $\left[ms + (j/c)s^2\right]$. Этот уровень может входить как в ряд ограничений модели, так и в целевую функцию.

Как видно из сказанного, множество разнообразных обстоятельств приводит к нелинейной формулировке ограничений или целевых функций задач математического программирования.

2. Постановка задачи нелинейного программирования

В общем случае, **задачу нелинейного программирования** можно поставить следующим образом:

Пусть в R^n заданны функции, $f(X), g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X)$ из которых хотя бы одна является нелинейной. Определим в R^n каким-нибудь образом скалярное произведение векторов X и Y, например, следующим образом:

$$Y'X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X'Y.$$

Символом $\|X\|$ будем обозначать норму вектора X, определенную $\|X\|^2 = X'X$.

Требуется найти точку, $X^0 \in R^n$ удовлетворяющую условиям:

$$g_1(X)=0,\ g_2(X)=0, \ldots, g_m(X)=0,$$

такую, что

$$f(X^0) = \min_{\substack{g_i(X)=0 \\ i=1,m}} f(X).$$

Кратко задачу нелинейного программирования в общем случае можно записать так:

$$f(X) \to \min \tag{1}$$

$$g_i(X) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m. \tag{2}$$

Очевидно, что задача нелинейного программирования имеет смысл лишь в том случае, когда допустимое множество K:

$$K = \{X : g_1(X)=0,\ g_2(X)=0, \ldots, g_m(X)=0\}$$

не пусто (система ограничений (2) совместна).

Нетрудно понять, что задача нелинейного программирования не всегда имеет решение.

Во многих случаях для доказательства существования решения задачи нелинейного программирования достаточно воспользоваться теоремой Вейерштрасса о минимуме на компакте непрерывной функции.

Задачу (1), (2) называют задачей на глобальный условный минимум в отличие от задачи на локальный условный минимум, которая состоит в следующем: найти точку X^0, удовлетворяющую ограничениям (2), такую, что при некотором достаточно малом ε, $\varepsilon > 0$, для всех допустимых векторов (точек) X из ε-окрестности точки X^0, $\|X - X^0\| \le \varepsilon$, выполняется неравенство

$$f\left(X^0\right) \le f\left(X\right).$$

В других обозначениях точка X^0- локального условного минимума – определяется равенством:

$$f\left(X^0\right) = \min_{\|X - X^0\| \le \varepsilon, \quad X \in K} f\left(X\right).$$

Замечание. Некоторые авторы используют термины абсолютный и относительный, а не глобальный и локальный условный минимум. Мы ниже будем использовать те и другие термины.

Замечание. Так как любое уравнение равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \varphi\left(X\right) \le 0, \\ -\varphi\left(X\right) \le 0, \end{cases}$$

то можно считать, что допустимое множество K задачи нелинейного программирования задается только неравенствами.

Замечание. Отметим также, что если ограничения задачи нелинейного программирования задается ограничениями типа неравенств, то их можно свести введением дополнительных переменных к ограничениям типа равенств.

Задачи нелинейного программирования образуют широкий класс оптимизационных задач. В частности, к этому классу принадлежит задача минимизации функции n переменных на всем пространстве R^n, которую называют **задачей безусловного минимума**.

Отметим, что основные результаты в нелинейном программировании получены при рассмотрении задач, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Даже в таких задачах оптимальное решение может быть найдено только для узкого класса целевых функций. Рассматривают частные случаи, когда целевая функция сепарабельная (является суммой n функций $f_j(X_j)$) или квадратичная. Отметим также, что в некоторых специальных случаях эти задачи можно решить графическим методом. Мы на них будем останавливаться ниже в п. 4.1.

3. Задачи на безусловный минимум (минимизация функции многих переменных)

Приступим к исследованию функций, определенных на n-мерном пространстве R^n. Точки пространства R^n будем обозначать символом X. При операциях с вектором X будем считать его записанным в виде вектора-столбца, хотя часто для экономии места компоненты вектора будут записываться в строку. Для обозначения вектора-строки используется символ (')- транспонирование. Поэтому

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где x_i, $\quad i = 1,2,..,n$ - компоненты вектора X (координаты точки X).

Для дважды непрерывно дифференцируемой скалярной функции

$$f(X), \qquad X \in R^n \text{ , (т.е. } f(X) \in C^{(2)}\text{),}$$

символы $\nabla f \equiv \dfrac{\partial f}{\partial X}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ означают

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Если функция $g(X)$- $\quad m$-мерная, то символ $\dfrac{\partial g}{\partial X}$ означает $n \times m$- мерную матрицу $(\nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_n)$.

3.1. Постановка задачи на безусловный минимум. Пусть в R^n задана скалярная функция $f(X)$. Требуется найти точку X^0, $\quad X^0 \in R^n$, такую, что

$$f(X^0) = \min_{x \in R^n} f(X).$$

Эта задача называется **задачей на глобальный (абсолютный) минимум,** точка X^0 - точкой глобального (абсолютного) минимума**. Задача на локальный (относительный) минимум** состоит в поиске точки X^0, $X^0 \in R^n$, такой, что при некотором достаточно малом ε, $\varepsilon > 0$, выполняется соотношение

$$f\left(X^0\right) = \min_{\left\|X - X^0\right\| \le \varepsilon, \quad X \in R^n} f\left(X\right).$$

Вопрос о существовании решения поставленных задач во многих случаях решается с помощью теоремы Вейерштрасса (п. 2).

3.2. Вспомогательные сведения из теории квадратичных форм. Пусть $A = \left(a_{ij}\right)$- симметричная $n \times n$ матрица. Выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X'AX$$

называется **квадратичной формой.** Эта форма называется **знакоположительной,** если неравенство

$$X'AX \ge 0$$

выполняется для всех точек $X \in R^n$, и **определенно положительной,** если неравенство

$$X'AX > 0$$

выполняется для всех $X \in R^n$, $X \ne 0$. Аналогично определяются **знакоотрицательные** и **определенно отрицательные квадратичные формы.** С введенными квадратичными формами связаны понятия положительных и неотрицательных матриц. Симметричная матрица A называется **положительной (неотрицательной)** и обозначается $A > 0$ (соответственно, $A \ge 0$), если она служит матрицей коэффициентов определенно положительной (знакоположительной) квадратичной формы.

Рассмотрим симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Минор матрицы A, составленный из строк с номерами $i_1,\dots,i_p$ и столбцов $j_1,\dots,j_p$, обозначим через

$$A\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_p \\ j_1,\dots,j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Минор называется **главным,** если $i_1 = j_1$,..., $i_p = j_p$, т. е. он составлен из строк и столбцов с одинаковыми номерами. Миноры

$$D_1 = a_{11}, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad ,\dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются **последовательными главными.**

Справедливы следующие утверждения **(критерии Сильвестра):**

1) для того чтобы матрица была положительной, необходимо и достаточно, чтобы ее последовательные главные миноры были положительны:

$$D_1 > 0 \quad ,\dots, \quad D_n > 0. \tag{1}$$

2) для того чтобы матрица была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были неотрицательны:

$$A\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_p \\ i_1,\dots,i_p \end{pmatrix} \ge 0, \quad 1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_p \le n, \quad p = 1,2,\dots,n. \tag{2}$$

Условий $D_1 \ge 0$,..., $D_n \ge 0$ недостаточно, чтобы матрица была неотрицательной. Действительно, у матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

последовательные главные миноры

$$D_1 = a_{11}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}^2 .$$

При $a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} < 0$, получаем $D_1 = 0, \qquad D_2 = 0$, однако в этом случае соответствующая форма $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{22}x_2^2$ не является знакоположительной (она знакоотрицательна).

Замечание. Применяя условия (1), (2) к матрице A, получаем критерии:

а) отрицательности матрицы: $(-1)^p D_p > 0, \quad p = 1,2,\ldots,n;$

б) неположительности матрицы: $(-1)^p A\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_p \\ i_1,\ldots,i_p \end{pmatrix} \geq 0.$

Замечание. Проверку условий (2) следует начинать с построения последовательных главных миноров, ибо из неравенств (1) следует, что все главные миноры положительны.

3.3. Необходимые условия минимума. Пусть $X^0, \quad X^0 \in R^n$ - точка локального (относительного) минимума, т.е. существует такое $\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$, что для всех $X, \quad \|X - X^0\| \leq \varepsilon$, выполняется неравенство $f(X^0) \leq f(X)$.

Теорема 1. В точке минимума X^0 гладкой функции $\left(f(X) \in C^{(1)}\right)$ выполняется условие

$$\nabla f(X^0) = 0 \ . \tag{3}$$

Доказательство мы опускаем, так как его можно найти в любом учебнике по математическому анализу, но по поводу гладкости (т.е. непрерывно дифференцируемости) функции хотим отметить, что каковая не излишня в данном контексте. Функция

$$f(x) = 2x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

имеет в нуле строгий минимум и равную нулю производную, но в сколь угодно малой окрестности нуля принимает, как положительные, так и отрицательные значения (см. рис.1).

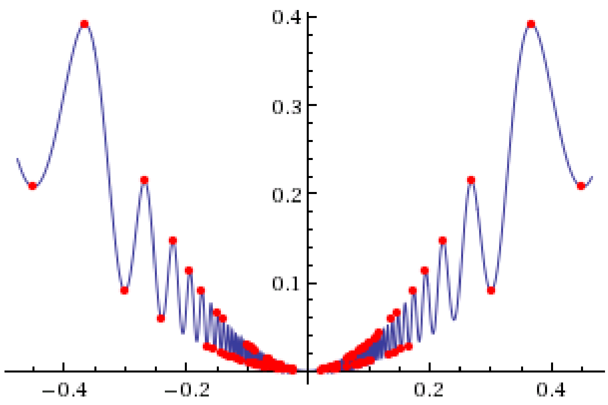

Рис.1

Условие (3) называется **необходимым условием минимума** первого порядка. Вектор $\nabla f\left(X^0\right)=\dfrac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial X}$ - принято называть **градиентом функции** $f(X)$ в точке X^0.

В новых терминах теорема 1 утверждает: в точке локального (относительного) минимума градиент функции равен нулю.

Теорема 1 сводит поиск относительного минимума к решению уравнения

$$\nabla f(X)=0. \tag{4}$$

Решения уравнения (4) называют стационарными точками функции $f(X)$. Смысл теоремы 1 можно выразить и таким образом: точка минимума функции является стационарной точкой функции. Обратное утверждение, конечно, неверно, ибо уравнению могут удовлетворять и точки максимума и другие точки.

Для того чтобы среди стационарных точек выделить точки минимума, нужно использовать дополнительные условия, например, необходимое условие второго порядка, которое содержится в следующем утверждении.

Теорема 2. Пусть функция $f(X)$ определена, непрерывна вместе с производными первого и второго порядков во всех точках n- мерного пространства R^n. Если X^0- точка относительного минимума, то в этой точке матрица вторых производных минимизируемой функции неотрицательна:

$$\frac{\partial^2 f\left(X^0\right)}{\partial X^2}\geq 0. \tag{5}$$

Доказательство этой теоремы также опускаем.

3.4. Достаточное условие относительного минимума. Из курса математического анализа без доказательства приведем следующее утверждение.

Теорема 3. Для того чтобы стационарная точка X^* была точкой относительного минимума дважды непрерывно дифференцируемой функций $f(X)$ ($f(X) \in C^{(2)}$), достаточно, чтобы матрица вторых производных функции $f(X)$ в точке X^* была положительной

$$\frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial X^2} > 0. \qquad (6)$$

Пример 11. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2.$$

Решение

Найдем стационарные точки функции $f(x, y, z)$. Они определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 4z = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 10y + 8z = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 4x + 8y + 18z = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0.$$

Поэтому единственное решение однородной системы есть $x = y = z = 0$.

Итак, функция $f(x, y, z)$ имеет единственную стационарную точку $(0,0,0)$. Найдем

$$\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Так как,

$$D_1 = 2 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0,$$

то, в силу критерия Сильвестра

$$\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix} > 0.$$

Точка $(0,0,0)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y,z)$, причем $f_{\min} = f(0,0,0) = 0$.

Пример 12. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = 3x^3 + 6xy + y^2 + z^2 - 2z + 1.$$

Решение

Найдем стационарные точки функции $f(x,y,z)$. Они определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + 6y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x + 2y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем стационарные точки $(2,-6,1)$ и $(0,0,1)$. Вычислив частные производные построим матрицу

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial X^2}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

В точке $(2,-6,1)$ имеем

$$\frac{\partial^2 f(2,-6,1)}{\partial X^2}==\begin{pmatrix}32 & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Так как,

$$D_1=32>0,\quad D_2=\begin{vmatrix}32 & 6\\ 6 & 2\end{vmatrix}=36>0,\quad D_3=\begin{vmatrix}32 & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=72>0,$$

то, в силу критерия Сильвестра

$$\frac{\partial^2 f(2,-6,1)}{\partial X^2}=\begin{pmatrix}32 & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}>0.$$

Точка $(2,\,-6,\,1)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y,z)$, причем $f_{\min}=f(2,-6,1)=-12$.

В точке $(0,0,1)$ имеем

$$\frac{\partial^2 f(0,0,1)}{\partial X^2}=\begin{pmatrix}0 & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Для исследования функции в точке $(0,\,0,\,1)$ нельзя использовать критерий Сильвестра, так как $D_1=0$. Легко видеть, что в этой точке экстремума нет. В самом деле, $f(0,0,1)=0$, а в столь угодно малой окрестности точки $(0,0,1)$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. Например, $f(0,0,\varepsilon)>0$, если $\varepsilon>0$ и $f(0,0,\varepsilon)<0$, если $\varepsilon<0$.

Если матрица $\dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ вырождена, ситуация принципиально усложняется. В скалярном случае о характере критической точки можно судить по первому ненулевому члену ряда Тейлора. Для функций n переменных дело обстоит совершенно иным образом по особой схеме. Эта схема позволяет свести анализ экстремали функции к исследованию стационарной точки функции меньшего числа переменных – информативной функции. Рассмотрение этой схемы исследования вырожденных стационарных точек выходит за рамки данного курса.

Предвидеть трудности (но не их масштаб) довольно легко. Понятно, что в отсутствие знакоопределенности дифференциалов порядка выше второго - поверхности их вырождения могут накладываться друг на друга весьма разнообразно, в результате чего аномалии становятся нормой.

Островок порядка характеризуется невырожденными критическими точками, в которых невырожденны соответствующие матрицы Гессе. Классическая лемма Морса гарантирует существование в некоторой окрестности критической точки - локальной системы координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такой что

$$f = x_1^2 + \cdots x_l^2 - x_{l+1}^2 - \cdots - x_n^2$$

Функция такого вида называется **морсовским** l**-седлом.** В случае $l = 0$ 0 имеем максимум, при $l = n$ - минимум.

Лемма Морса дает по существу полную классификацию невырожденных критических точек. Для вырожденных критических точек такой классификации нет. Простой пример вырожденной критической точки **- обезьянье седло** (рис. 3), которое описывается функцией

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

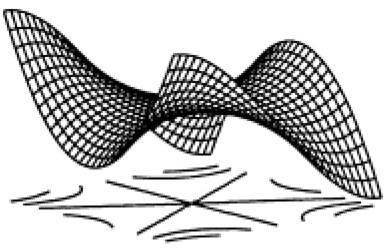

Рис. 3

Упражнения

Исследовать на экстремум функции двух переменных (1-17).

1. $f(x,y)=x^3+3xy^2-39x-36y+26$.

2. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-12x-3y$.

3. $f(x,y)=3+2x-y-x^2+xy-y^2$.

4. $f(x,y)=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

5. $f=4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1$.

6. $f(x,y)=(x+y^2)e^{\frac{x}{2}}$.

7. $f(x,y)=(x^2-2y^2)e^{x-y}$.

8. $f(x,y)=(8x^2-6xy+3y^2)e^{2x+3y}$.

9. $f(x,y)=(5-2x+y)e^{x^2-y}$.

10. $f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+3x^2e^y-e^{-y^2}$.

11. $f(x,y)=(25-5x-7y)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

12. $f(x,y)=108\ln x-xy^2+\dfrac{y^3}{3}$.

13. $f(x,y)=x^2+y^2-32\ln(xy)$.

14. $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$.

15. $f(x,y)=x+y+4\sin x\sin y$.

16. $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$.

17. Найти все стационарные точки функции $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ и исследовать ее на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточное условие экстремума?

18. Может ли непрерывная дифференцируемая функция $f(x,y)$ иметь бесконечное множество максимумов и ни одного минимума?

19. Верно ли утверждение: если непрерывно дифференцируемая функция $f(x,y)$, $(x,y) \in R^2$, имеет только одну стационарную точку (x_0, y_0), в которой у нее локальный минимум, то справедливо неравенство $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$, $(x,y) \in R^2$?

Исследовать на экстремум функции трех переменных (21-30).

21. $f(x,y,z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$.

22. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$.

23. $f(x,y,z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$.

24. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$.

25. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$.

26. $f(x,y,z) = zyz(16 - x - y - 2z)$.

3.5.Замечание к вопросу о глобальных экстремумах. Существенный интерес нередко представляет вопрос о глобальных экстремумах. В одномерном случае локальный минимум при отсутствии других стационарных точек является одновременно глобальным минимумом. В общем случае это не так. Вот соответствующий контрпример.

Пример 13. Пусть X_0 - единственная стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(X)$, $X \in R^n$, и X_0 реализует его локальный минимум. Будет, ли эта точка точкой его глобального минимума? Ответ на этот вопрос отрицателен. Соответствующий пример дает функция

$$f(x,y) = \frac{3x^2 - 2x^3 - 1}{1 + y^2} + (3x^2 - 2x^3)e^{-y}.$$

Эта функция имеет лишь нулевую стационарную точку, которая реализует ее локальный минимум, поскольку матрица

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

Однако, $f(0,0) = -1$, $f(2,0) = -9$.

Существуют различные признаки существования глобального минимума (максимума). Они связаны с понятиями, введения которых выходят за рамки данного курса.

Упражнение

Покажите, что если функция $f(X)$ имеет в точке $X^{\bullet}$ локальный минимум, и $\lim\limits_{\|X\|\to\infty} \|F(X)\| = \infty$, то в $X^{\bullet}$ достигается глобальный минимум $f(X)$.

Литература

1. Igor Griva, Stephen G. Nash, Ariela Sofer. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. 2009. (5-7, 483-486)

2. Robert M. Leekley, Applied Statiatics for Businiess and Economics, USA, 2010.

3. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, NY 2005, (347-355)

4. Бабаджанов Ш. “Математическое программирование”. Учебное пособие. Т.: ТМИ, 2006.

5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

План:

1. Первообразная

2. Понятие неопределенного интеграла

3. Свойства неопределенного интеграла

4. Метод замены переменного (метод подстановки)

5. Метод интегрирования по частям

6. Заключительное замечание

7. Некоторые приложения неопределенного интеграла в экономике

Ключевые слова и словосочетания

Первообразная, неопределенный интеграл, операция интегрирования, формула интегрирования подстановкой, подстановка Эйлера, формула интегрирования по частям, интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций.

Ранее нами была рассмотрена задача о нахождении мгновенной скорости материальной точки по заданному закону ее движения. Если $S = S(t)$ - путь, пройденный точкой за время t от начала движения, то мгновенная скорость и в момент t равна производной функции $S(t)$, т. е.

$$v = S'(t).$$

В физике встречается обратная задача: по заданной скорости $v = S'(t)$ найти закон движения, т.е. найти такую функцию $S(t)$, производная которой равна $v(t)$.

1. Первообразная

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на интервале $(a,\ b)$. Если функция $F(x)$ имеет производную на интервале $(a,\ b)$ и если для всех $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

то функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$.

Замечание. Понятие первообразной можно ввести и для других промежутков (полуинтервала - конечного или бесконечного, отрезка).

Дадим определение первообразной на отрезке.

Если функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на отрезке $[a,\ b]$, причем функция F дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и для всех $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство (1), то функцию $F(x)$ назовем первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Замечание. Если $F(x)$- первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то функция $F(x)+C$ при любом значении $C = const$ также является первообразной для $f(x)$.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то для всех $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \tag{2}$$

где C - постоянная.

Доказательство. Обозначим $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. По определению первообразной и в силу условий теоремы для всех $x \in (a,\ b)$ выполняются равенства

$$F_2'(x) = f(x), \qquad F_1'(x) = f(x),$$

откуда следует, что функция $\Phi(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$ и для всех $x \in (a,\ b)$ имеет место равенство

$$\Phi'(x) = 0$$

Согласно следствию из теоремы Лагранжа, $\Phi(x) = C = const$ == const для всех $x \in (a,\ b)$ или $F_2(x) - F_1(x) = C$, т.е. справедливо равенство (2). ■

Таким образом, для данной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Для того чтобы из совокупности первообразных выделить какую-либо первообразную $F_1(x)$, достаточно указать точку $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащую графику функции $y = F_1(x)$.

Пример 1. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, найти такую первообразную $F_1(x)$, график которой проходит через точку $M_0(1,\ 2)$.

Решение

Совокупность всех первообразных функции $\dfrac{1}{x^2}$ описывается формулой

$$F(x)=-\frac{1}{x}+C.$$

По условию $F_1(1)=2$, т.е. $2=-1+C$, откуда $C=3$. Следовательно,

$$F_1(x)=3-\frac{1}{x}. \ \blacktriangle$$

Упражнения

1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,\infty)$.►

2. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(-\infty,0)$, первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M_0(-2;2)$.►

Замечание. В дальнейшем будет доказано, что первообразная существует для любой функции, непрерывной на отрезке (или интервале).

2. Понятие неопределенного интеграла

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке Δ называют **неопределенным интегралом от функции** f на этом промежутке, обозначают символом $\int f(x)dx$ и пишут

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (3)$$

Здесь $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на промежутке Δ, C - произвольная постоянная. Знак $\int$ называют знаком интеграла, f - подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

Подынтегральное выражение можно записать в виде $F'(x)dx$ или $dF(x)$, т. е.

$$f(x)dx = dF(x). \qquad (4)$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции, которая является обратной операции дифференцирования, называют **интегрированием.**

Поэтому любую формулу для производной, т.е. формулу вида $F'(x) = f(x)$ можно записать в виде (3). Используя таблицу производных, можно найти интегралы от некоторых элементарных функций. Например, из равенства $(\sin \boldsymbol{x})' = \cos \boldsymbol{x}$ следует, что

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

3. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \qquad (5)$$

Доказательство. Из равенства (3) следует, что

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x),$$

так как $dC = 0$.

Согласно формуле (5) знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла. ■

Свойство 2.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (6)$$

Доказательство. Равенство (6) следует из равенств (3) и (4).

Соотношение (6) показывает, что и в случае, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, эти знаки также взаимно уничтожаются (если отбросить постоянную C). ■

Свойство 3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на некотором промежутке первообразные, то для любых $\alpha \in R^1$, $\beta \in R^1$ таких, что $\alpha\beta \neq 0$, функция $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть F и G - первообразные для функций f и g соответственно, тогда $\Phi = \alpha F + \beta G$ - первообразная для функции φ, так как

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x) = \varphi(x).$$

Согласно определению интеграла левая часть (7) состоит из функций вида $\Phi(x) + C$, а правая часть - из функций вида

$$\alpha F(x) + \alpha C_1 + \beta G(x) + \beta C_2 = \Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2.$$

Так как $\alpha\beta \neq 0$, то каждая функция вида $\Phi(x) + C$ принадлежит совокупности функций $\Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$ и наоборот, т. е. по заданному числу $\boldsymbol{C}$ можно найти $\boldsymbol{C}_1$ и $\boldsymbol{C}_2$, а по заданным C_1 и C_2 - число C такое, чтобы выполнялось равенство $C = \alpha C_1 + \beta C_2$.

Таким образом, интегрирование обладает свойством линейности: интеграл от линейной комбинации функции равен соответствующей линейной комбинации интегралов от рассматриваемых функций.■

Пример 2. Найти $\int f(x)dx$, если:

$$a) \quad f(x) = e^x + x^2; \qquad b) \quad f(x) = -2\sin x + \frac{3}{1+x^2}.$$

Решение

a) Используя таблицу производных и свойство 3 интеграла, получаем

$$\int(e^x + x^2)dx = e^x + \frac{x^3}{3} + C.$$

b) Так как $(-\cos x)' = \sin x$, $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, то

$$\int\left(-2\sin x + \frac{3}{1+x^2}\right)dx = 2\cos x + 3arctgx + C. \ \blacktriangle$$

Упражнение

Найти интеграл:

$a)\ \int\left(x-2e^{x}\right)dx$; $b)\ \int\frac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^{2}}{x}dx$; $c)\ \int\frac{dx}{x^{4}+4x^{2}}$;

$d)\ \int\frac{\sqrt{x^{2}-3}-3\sqrt{x^{2}+3}}{\sqrt{x^{4}-9}}dx$; $e)\ \int\cos^{2}\frac{x}{2}dx$; е) $f)\ \int tg^{2}x dx$;

$g)\ \int 3^{x}\cdot 5^{2x}dx$. ►

Дальнейшее расширение множества функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, можно получить, если воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции и правилом дифференцирования произведения двух функций.

4. Метод замены переменного (метод подстановки)

Пусть функция $t=\varphi(x)$ определена и дифференцируема на промежутке Δ и пусть $\tilde{\Delta}=\varphi(\Delta)$ - множество значений функции φ на Δ.

Если функция $U(t)$ определена и дифференцируема на $\tilde{\Delta}$, причем

$$U'(t)=u(t), \tag{8}$$

то на промежутке Δ определена и дифференцируема сложная функция $F(x)=U(\varphi(x))$ и

$$F(x)=\left(U(\varphi(x))\right)'=U'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x). \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует, что если $U(t)$ - первообразная для функции $u(t)$, то $U(\varphi(x))$- первообразная для функции и $u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$. Это означает, что если

$$\int u(t)dt=U(t)+C. \tag{10}$$

то

$$\int u(\varphi(x))\varphi'(x)dx=U(\varphi(x))+C. \tag{11}$$

или

$$\int u(\varphi(x))d\varphi(x) = U(\varphi(x)) + C. \qquad (12)$$

Формулу (12) (или формулу (11)) называют формулой **интегрирования заменой переменного.**

Она получается из формулы (10), если вместо t подставить дифференцируемую функцию $\varphi(x)$.

Замечание. Формула (12) дает возможность найти интеграл $\int f(x)dx$, если функция $\boldsymbol{f(x)}$ представляется в виде $\boldsymbol{f(x) = u(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}$ и если известна первообразная функции и $\boldsymbol{u(t)}$, т. е. известен интеграл (10).

Отметим важные частные случаи формулы (12).

а) Пусть $\boldsymbol{F(x)}$ - первообразная функции $\boldsymbol{f(x)}$, т. е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Тогда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0. \qquad (13)$$

б) Используя равенство

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

получаем

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C, \text{ если } \varphi(x) \neq 0. \qquad (14)$$

в) Так как

$$\int t^{\alpha} dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1, \quad t > 0.$$

то

$$\int (\varphi(x))^{\alpha} \varphi'(x)dx = \int (\varphi(x))^{\alpha} d\varphi(x) = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1, \quad t > 0. \qquad (15)$$

Приведем примеры применения формул (13) – (15).

Примеры

3. $\int (2x+3)^6 dx = \int (2x+3)^6 d(2x+3) = \dfrac{(2x+3)^7}{14} + C$. ▲

4. $\int \dfrac{dx}{(x+a)^k} = \begin{cases} \ln|x+a| + C, & k=1, \\ \dfrac{(x+a)^{-k+1}}{1-k} + C, & k \neq 1. \end{cases}$ ▲

5. $\int \dfrac{xdx}{x^2+a} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(x^2+a)}{x^2+a} = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+a| + C$. ▲

6. $\int ctgxdx = \int \dfrac{d(\sin x)}{\sin x} = \dfrac{1}{2}\ln|\sin x| + C$. ▲

7. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \dfrac{d(x^2+a)}{2(x^2+a)} = \sqrt{x^2+a} + C$. ▲

8. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} = \dfrac{1}{a} arctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + C, \quad a>0$. ▲

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \dfrac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C, \quad a>0$. ▲

10. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \int \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$. ▲

11. $J = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}, \quad a \neq 0$. ▲

Решение. Пусть $x + \sqrt{x^2+a} = t = t(x)$, тогда

$$dt = t'(x)dx = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = \frac{t(x)}{\sqrt{x^2+a}}dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt(x)}{t(x)}.$$

Поэтому

$$J = \int \frac{dt(x)}{t(x)} = \ln|t(x)| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C,$$

т.е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C. \ ▲$$

Замечание. При вычислении этого интеграла использована **подстановка Эйлера** $x+\sqrt{x^2+a}=t$.

Замечание. Интегралы, рассмотренные в примерах 8-11,часто применяются. Эти интегралы обычно считают табличными.

Приведем таблицу интегралов, полученную из соответствующей таблицы производных. Сюда включены интегралы, найденные в примерах 8-11.

1) $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ a\neq -1.$

2) $\int \dfrac{dx}{x+a}=\ln|x+a|+C.$

3) $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C,\ \ a>0,\ \ a\neq -1,\qquad \int e^{x}dx=e^{x}+C.$

4) $\int \sin xdx=-\cos x+C.$

5) $\int \cos xdx=\sin x+C.$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C.$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C.$

9) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}arctg\left(\dfrac{x}{a}\right)+C,\ \ a>0.$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)+C,\ \ a>0.$

11) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C,\ \ a\neq 0.$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\ \ a\neq 0.$

Примеры

12. $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Решение

Так как

$$x(1-x)=-(x^2-x)=\frac{1}{4}-\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

то, используя пример 9 при $a=\frac{1}{2}$, получаем

$$J=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)+C=\arcsin(2x-1)+C.$$

т.е.

$$J=\arcsin(2x-1)+C. \ \blacktriangle$$

13. $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$.

Решение

Так как

$$x^2-3x+5=\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)+5-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4},$$

то, используя пример 11, получаем

$$J=\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}}=\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+5}\right|+C. \ \blacktriangle$$

Иногда бывает целесообразно при вычислении интеграла

$$J=\int f(x)dx \tag{16}$$

Перейти к новой переменной.

Пусть $x=\varphi(t)$ - строго монотонная и дифференцируемая на некотором промежутке функция. Тогда она имеет обратную функцию

$$t=\omega(x). \tag{17}$$

Преобразуя подынтегральное выражение в интеграле (16) с помощью подстановки $x=\varphi(t)$, получаем $f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(x)dt$. Обозначим $u(t)=f(\varphi(t))\varphi'(x)$, тогда

$$f(x)dx=u(t)dt. \tag{18}$$

Пусть $U(t)$ - первообразная для функции $\boldsymbol{u(t)}$ тогда

$$\int u(t)dt=U(t)+C. \tag{19}$$

Из равенств (16) - (19) находим

$$J=\int f(x)dx=\int u(t)dt=U(t)+C=U(\omega(x))+C. \tag{20}$$

Формулу (20) называют **формулой интегрирования подстановкой.**

Согласно этой формуле для вычисления интеграла (16) достаточно подобрать такую обратимую дифференцируемую функцию $x=\varphi(t)$, с помощью которой подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде $u(t)dt$, причем первообразная для функции $u(t)$ известна.

Пример 14. Вычислить интеграл

$$J=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\quad a>0.$$

Решение

Подынтегральная функция определена на отрезке $[-a,\ a]$. Положим $x=\varphi(t)=a\sin t$, тогда $t=\omega(x)=\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{x}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\cos^2\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{a}\cos\boldsymbol{t}$, так как $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $a>0$. Следовательно,

$$J=\int a\cos t\cdot\cos t dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C.$$

Так как

$$\sin t = \frac{x}{a}, \qquad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

то

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2t = \sin t \cdot \cos t = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

Поэтому

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

Упражнения

1. Найти интеграл:

$a)\ \int (3x-5)^{10} dx;$ $\qquad b)\ \int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1}\,dx;$ $\qquad c)\ \int tgx dx;$

$d)\ \int \frac{dx}{2+\cos^2 x},\ \ |x| < \frac{\pi}{2};$ $\qquad e)\ \int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}} dx;$ $\qquad f)\ \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6 - 7x^4 + x^2}} dx.$ ▶

2. Найти интеграл:

$a)\ \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}};$ $\qquad b)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}},\quad x>0;$ $\qquad c)\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$ ▶

3. Найти интеграл:

a)$a)\ \int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx;$ $\qquad b)\ \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}} dx.$ ▶

5. Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на промежутке Δ. Тогда функция uv также имеет непрерывную производную на Δ и, согласно правилу дифференцирования произведения, выполняется равенство

$$uv' = (uv)' - vu'$$

Интегрируя это равенство и учитывая, что

$$\int (uv)' dx = uv + C,$$

получаем

$$\int uv' dx = uv + C - \int vu' dx.$$

Относя произвольную постоянную $\boldsymbol{C}$ к интегралу $\int vu'dx$ находим

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \qquad (21)$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \ . \qquad (22)$$

Формула (21) (или (22)) называется **формулой интегрирования по частям.**

Она сводит вычисление интеграла $\int \boldsymbol{udv}$ к вычислению интеграла $\int \boldsymbol{vdu}$.

Примеры

15. $\int x\cos xdx = \int xd(\sin x) = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$. ▲

16. Вычислить интеграл

$$J = \int \sqrt{x^2 + a}\,dx.$$

Решение

Полагая $u = \sqrt{x^2 + a}$, $v = x$, по формуле (21) находим

$$J = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}}dx,$$

где

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}}dx = \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}}dx = J - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Отсюда получаем уравнение относительно J

$$J = x\sqrt{x^2 + a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Используя результат примера 11, находим

$$\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C. \ ▲$$

Упражнения

1. Найти интеграл:

a) $\int \frac{dx}{\sin x}$; b) $\int \ln xdx$; c) $\int x\sin xdx$. ►

2. Найти интеграл:

a) $\int x^2 e^x dx$; b) $\int \arccos^2 xdx$. ►

7. Некоторые приложения неопределенного интеграла в экономике

Теперь будем ознакомиться некоторыми приложениями интеграла в экономике.

Пусть $Q(L)$ – функция общего продукта, $MP(L)$ – функция маржинального продукта. Функция маржинального продукта с функцией общего продукта связана следующим образом:

$$MP(L) = \frac{dQ(L)}{dL} \Rightarrow Q(L) = \int MP(L)dL. \qquad (14)$$

Пусть $MP(L) = a = const > 0$. Тогда

$$Q(L) = \int adL = aL + C.$$

Примеры

17. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 3(3L+2)$, то найдите функцию общего продукта. Воспользуемся формулой (14) и имеем:

$$Q(L) = \int MP(L)dL = 3\int (3L+2)dL = \frac{9}{2}L^2 + 6L + C. \blacktriangle$$

18. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 4\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L = 0 \Rightarrow Q = 0$. Воспользуемся формулой (5.14) и имеем:

$$Q(L) = 4\int \sin 2L dL = -2\cos 2L + C.$$

Здесь $L = 0 \Rightarrow C = 2$. Тогда $Q(L) = -2\cos 2L + 2. \blacktriangle$

19. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 4\cos 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L = 0 \Rightarrow Q = 3$. Воспользуемся формулой (5.14) и имеем:

$$Q(L) = 4\int \cos 2L dL = 2\sin 2L + C.$$

Здесь $L = 0 \Rightarrow C = 3$. Тогда $Q(L) = 2\sin 2L + 3. \blacktriangle$

Упражнения

a) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=3L\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта.

b) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=5L^2\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0 \Rightarrow Q=0$.

c) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=4L\ln 3L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0 \Rightarrow Q=2$.

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

План:
1. Метод неопределенных коэффициентов
2. Интегрирование рациональных функций
3. Интегрирование иррациональных функций
4. Интегрирование тригонометрических функций

Ключевые слова и словосочетания:

Метод неопределенных коэффициентов, простейшие дроби, дроби 4-го рода, дроби 2-го рода, универсальная подстановка.

1. Метод неопределенных коэффициентов

В ряде случаев по виду подынтегральной функции можно предположить, что ее первообразная будет иметь ту же структуру, что и подынтегральная функция. Это бывает в тех случаях, когда, например, подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена и показательной функции, произведение многочлена и синуса или косинуса или произведение показательной функции и синуса или косинуса. Тогда записывают искомую первообразную в предполагаемом виде с неопределенными буквенными коэффициентами. Задача в этом случае сводится к нахождению неопределенных буквенных коэффициентов, для чего, пользуясь свойствами неопределенного интеграла, сначала дифференцирует обе части равенства, а затем сравнивают левую часть полученного равенства с правой. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Вычислить $\int \left(x^3 + 2x^2 + 5\right) e^x dx$.

Решение

Если вычислить этот интеграл с помощью трехкратного интегрирования по частям, то получим:

$$\int \left(x^3 + 2x^2 + 5\right) e^x dx = \left(x^3 - x^2 + 2x + 3\right) e^x + C.$$

Этот ответ имеет ту же структуру, что и подынтегральная функция, т.е. является (с точностью до произвольной постоянной) произведением многочлена третьей степени на показательную функцию e^x. Поэтому первообразную можно было сразу искать в следующем виде:

$$\int \left(x^3 + 2x^2 + 5\right) e^x dx = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^x + E, \qquad (1)$$

где E - произвольная постоянная.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты $A, B, C, D,$ продифференцируем обе части равенства (1), учитывая при этом что производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(x^3 + 2x^2 + 5\right)e^x = \left(3A^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)e^x$$

Разделив обе части этого равенства на e^x, получим:

$$x^3 + 2x^2 + 5 = 3Ax^2 + 2B + C + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

откуда

$$x^3 + 2x^2 + 5 = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + (C + D). \qquad (2)$$

Воспользуемся теперь тем, что два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Сравнив в тождестве (2) коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A = 1 \\ x^2 & 3A + B = 2, \\ x^1 & 2B + C = 0 \\ x^0 & C + D = 5. \end{array}$$

Мы получили систему из четырех уравнений с четырьмя переменными A, B, C, D.

Решая ее, находим: $A=1,\ B=-1,\ C=2,\ D=3$.

Таким образом,

$$\int (x^3+2x^2+5)e^x dx = (x^3-x^2+2x+3)e^x+E. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $\int e^{3x}\sin 2x\, dx$.

Решение

Здесь подынтегральная функция является произведением показательной функции и синуса. В этом случае ее первообразная равна произведению показательной функции и линейной комбинации синуса и косинуса того же аргумента:

$$\int e^{3x}\sin 2x\, dx = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)+C. \qquad (3)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B продифференцируем обе части равенства (3):

$$e^{3x}\sin 2x = 3e^{3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+e^{3x}(-2A\sin 2x+2B\cos 2x).$$

Разделим обе части этого равенства на e^{3x}:

$$\sin 2x = 3A\cos 2x+3B\sin 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x.$$

Далее имеем:

$$\sin 2x=(3B-2A)\sin 2x+(3A+2B)\cos 2x.$$

Полученное равенство справедливо для любых значений x.Это имеет место тогда, когда равны коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства. Приравняв друг другу указанные коэффициенты, получим:

$$\begin{array}{r|l} \sin 2x & 3B-2A=1, \\ \cos 2x & 3A+2B=0. \end{array}$$

Из этой системы двух уравнений с двумя переменными A и B находим: $A=-\dfrac{2}{13},\ B=\dfrac{3}{13}$. Значит

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(-\frac{2}{13}\cos 2x + \frac{3}{13}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{13}e^{3x}\left(3\sin 2x - 2\cos 2x\right) + C. \ \blacktriangle$$

Упражнение

Используясь методом неопределенных коэффициентов, вычислите следующие интегралы:

$\int \left(3x^2+2x-1\right)e^{2x}\,dx;$ $\quad\int \left(5x^2-8x+2\right)e^{-x}dx;$

$\int e^{-x}\cos 3x\,dx;$ $\quad\int (x+8)\sin\,2x\,dx.$ ▶

2. Интегрирование рациональных функций

2.1. Интегрирование простейших рациональных функций. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(x)\,dx,$$

где $y = R(x)$-рациональная функция. Всякое рациональное выражение $R\,(x)$ можно представить в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Если эта дробь неправильная, т.е. если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то ее можно представить в виде суммы многочлена (целая часть) и правильной дроби. Поэтому достаточно рассмотреть интегрирование правильных дробей.

Покажем, что интегрирование таких дробей сводится к интегрированию *простейших дробей*, т.е. выражений вида:

$$1)\frac{A}{x-a};\quad 2)\frac{A}{(x-a)^n};\quad 3)\frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad 4)\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n},$$

где $A,\ B,\ a,\ p,\ q$ - действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. Выражение вида 1) и 2) называют *дробями 4-го рода*, а выражения вида 3) и 4) – *дробями 2-го рода*.

Интегралы от дробей 1-го рода вычисляются непосредственно

1) $\quad\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|\,x-a\,| + C;$

2) $\quad\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C\,(n=2,3,4,\ldots).$

Рассмотрим вычисление интегралов от дробей 2-го рода:

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Сначала заметим, что

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arct\,g \frac{t}{a} + C,$$

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + C.$$

Чтобы свести вычисление интеграла 3) к этим двум интегралам, преобразуем квадратный трехчлен x^2+px+q, выделив из него полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Так как предположению этот трехчлен не имеет действительных корней, то $q-\frac{p^2}{q} > 0$ и мы можем положить $q-\frac{p^2}{4} = a^2$. Подстановка $x+\frac{p}{2} = t,\ dx = dt$ преобразует интеграл 3) к линейной комбинации указанных двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt =$$

$$= A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{1}{2}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)arctg\frac{t}{a}.$$

В окончательном ответе нужно лишь заменить t на $x+\frac{p}{2}$, а $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Так как $t^2+a^2 = x^2+px+q$, то

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

4) $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$.

Как и в предыдущем случае, положим $x+\frac{p}{2}=t$. Получим:

$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}.$$

Но

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctg\,t.$$

Таким образом,

$$I_2=\frac{1}{2}arctg\,t+\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}.$$

Окончательно получаем:

$$\int\frac{x+2}{\left(x^2+6x+10\right)^2}dx=-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}-\frac{1}{2}arctg\,t-\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x^2+6x+10\right)}-\frac{1}{2}arctg(x+3)-\frac{x+3}{2\left(x^2+6x+10\right)}+C=$$

$$=\frac{-x-4}{2\left(x^2+6x+10\right)}-\frac{1}{2}arctg(x+3)+C.$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от простейших дробей.

$\int\frac{dx}{6x^2+x+2}$. ▶

$\int\frac{5x+3}{\left(x^2+2\right)^2}dx$. ▶

$\int\frac{dx}{(2x+3)^3}$. ▶

$\int\frac{3x+2}{x^2-3x+8}dx$. ▶

$\int\frac{2x-7}{\left(x^2+4x+15\right)^2}dx$. ▶

2. 2. Интегрирование правильных дробей. Рассмотрим правильную дробь $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)$ - многочлен степени n. Не теряя общности, можно считать, что старший коэффициент в $Q(x)$ равен 1. В курсе алгебры доказывается, что такой многочлен с действительными коэффициентами:

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha}\ldots(x-x_k)^{\beta}(x^2+px+q)^{\gamma}\ldots(x^2+rx+s)^{\delta},$$

где $x_1,\ldots,x_k$ - действительные корни многочлена $Q(x)$, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней. Можно доказать, что тогда $R(x)$ представляется в виде суммы простейших дробей вида 1) – 4):

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-x_1}+$$

$$+\ldots+\frac{B_1}{(x-x_k)}+\frac{B_2}{(x-x_k)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_\beta}{x-x_k}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\gamma}}+$$

$$+\ldots+\frac{M_\gamma x+N_\gamma}{x^2+px+x}+\ldots+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+rx+s)^{\delta}}+\ldots+\frac{E_\delta x+F_\delta}{x^2+rx+s}, \qquad (1)$$

где показатели у знаменателей последовательно уменьшаются от α до $1,\ldots,$ от β до 1, от γ до $1,\ldots,$ от δ до 1, а $A_1,\ldots,F_\delta$ неопределенные коэффициенты. Для того чтобы найти эти коэффициенты, необходимо освободиться от знаменателя и, получив равенство двух многочленов, воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

После нахождения неопределенных коэффициентов остается вычислить интегралы от полученных простейших дробей. Так как при интегрировании простейших дробей получаются, как мы видели, лишь рациональные функции, арктангенсы и логарифмы, то *интеграл от любой рациональной функции выражается через рациональную функцию, арктангенсы и логарифмы*.

Пример 3. Вычислить $\int\frac{6x+1}{x^2+2x-3}dx$.

Решение

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{6x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}.$$

Освободившись в этом равенстве от знаменателей, получим:

$$6x+1=A\,(x+3)+B\,(x-1). \qquad (2)$$

Для отыскания коэффициентов воспользуемся методом подстановки частных значений. Для нахождения коэффициента A положим $x=1$. Тогда из равенства (2) получим $7=4A$, откуда $A=\frac{7}{4}$. Для отыскания коэффициента B положим $x=-3$. Тогда из равенства (2) получим $-17=-4B$, откуда $B=\frac{17}{4}$.

$$\frac{6x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{\frac{7}{4}}{x-1}+\frac{\frac{17}{4}}{x+3}.$$

Значит,

$$\int\frac{6x+1}{x^3+2x-3}dx=\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{17}{4}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{7}{4}\ln|x-1|+\frac{17}{4}\ln|x+3|+C. \blacktriangle$$

Пример 4. Вычислим $\int\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)}dx$.

Решение

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей. В знаменателе содержится множитель x^2+2, не имеющий действительных корней, ему соответствует дробь 2-го рода:

$$\frac{Ax+B}{x^2+2},$$

множителю $(x-1)^2$ соответствует одна дробь 1-го рода $\frac{E}{x+2}$. Таким образом, подынтегральную функцию мы представим в виде суммы четырех дробей:

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{C}{\left(x-1\right)^2}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+2}. \qquad (3)$$

Освободимся в этом равенстве от знаменателей. Получим:

$$x^4+2x^2+8x+5=\left(Ax+B\right)\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)+C\left(x^2+2\right)$$

$$\left(x+2\right)+D\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)\left(x+2\right)+E\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)^2 \qquad (4)$$

Знаменатель подынтегральной функции имеет два действительных корня $x=1,\ x=-2$. При подстановке в равенство (4) значения $x=1$ получаем $16=9C$, откуда находим $C=\frac{16}{9}$. при подстановки $x=-2$ получаем $13=54E$ и соответственно определяем $E=\frac{13}{54}$. Подстановка значения $x=i\sqrt{2}$ (корня многочлена x^2+2) позволяет перейти к равенству

$$4-4+8i\sqrt{2}+5=\left(Ai\sqrt{2}+B\right)\left(i\sqrt{2}-1\right)^2\left(i\sqrt{2}+2\right).$$

Оно преобразуется к виду:

$$\left(10A+2B\right)+\left(2A-5B\right)\sqrt{2}\,i=5+8\sqrt{2}\,i,$$

откуда $10A+2B=5$, а $\left(2A-5B\right)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

Решив систему двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases}10A+2B=5,\\ 2A-5B=6,\end{cases}$$

находим: $A=\frac{41}{54}, B=-\frac{35}{27}$.

Осталось определить значение коэффициента D. Для этого в равенстве (4) раскроем скобки, приведем подобные члены, а затем сравним коэффициенты при x^4. Получим :

$$A+D+E=1, \text{ т.е. } D=0.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в равенство (3) :

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}=\frac{\frac{41}{54}x-\frac{35}{27}}{x^2+2}+\frac{\frac{16}{9}}{\left(x-1\right)^2}+\frac{\frac{13}{54}}{x+2}$$

а затем перейдем к интегрированию:

$$\int \frac{x^4+2x^2+8x+5}{\left(x^2+2\right)(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{41}{54}\int\frac{x\,dx}{x^2+2}-\frac{35}{27}\int\frac{dx}{x^2+2}+$$

$$+\frac{16}{9}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{13}{54}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{41}{108}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{35}{27\sqrt{2}}arc\,tg\frac{x}{\sqrt{2}}-$$

$$-\frac{16}{9(x-1)}+\frac{13}{54}\ln|x+2|+C. \ \blacktriangle$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от правильных дробей.

$\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx.$

$\int \frac{3x-2}{(x+1)\left(x^2-9\right)}dx.$

$\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+3)^2}.$

$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)}.$

$\int \frac{x\,dx}{x^3+1}.$

$\int \frac{2x-1}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)}dx.$ ▶

2. 3. Интегрирование неправильных дробей. Пусть нужно проинтегрировать функцию, где $f(x)$ и $g(x)$ - многочлены, причем степень многочлена $f(x)$ больше или равна степени многочлена $g(x)$. В этом случае прежде всего необходимо выделить целую часть неправильной дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$, т.е. представить ее в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$$

где $s(x)$ - многочлен степени, равной разности степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$, а $\frac{r(x)}{g(x)}$- правильная дробь.

Тогда

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int s(x)dx+\int\frac{r(x)}{g(x)}dx.$$

Пример 5. Вычислить $\int \frac{x^4-4x^3+x^2+16x-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$.

Решение

Имеем:

$$g(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6,$$

$$f(x)=x^4-4x^3+x^2+16x-11.$$

Для выделения целой части разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4-4x^3+x^2+16x-11 & \\ x^4-2x^3-5x+6x & x^3-2x^2-5x+6 \\ \hline -\,-2x^3+6x^2+10x-11 & x-2 \\ -2x^3+4x^2+10x-12 & \\ \hline 2x^2\quad+\;1 & \end{array}$$

Итак,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=x-2+\frac{2x^2+1}{x^2-2x^2-5x+6}.$$

Значит,

$$\int \frac{x^4-4x^3+x^2+16x-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx=\int(x-2)+dx+\int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx.$$

Имеем:

$$\int(x-2)dx=\frac{x^2}{2}-2x+C_1.$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$ применяется, как и выше, метод неопределенных коэффициентов. После вычислений, которые мы оставляем читателю, получаем:

$$\int\frac{x^4-4x^3+x^2+16-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{19}{10}\ln|x-3|+C.$$

▲

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от неправильных дробей.

$\int\frac{x^5+x-1}{x-2}dx.$ $\qquad\qquad$ $\int\frac{x^3+4}{x^2-6x+8}dx.$

$$\int \frac{x^4+2}{x^3-x}dx.$$

$$\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx. \blacktriangleright$$

3. Интегрирование иррациональных функций

При интегрировании иррациональных функций используются различные приемы. Мы рассмотрим метод *рационализации* подынтегрального выражения. Он заключается в выборе такой подстановки $t=\varphi(x)$, которое данное подынтегральное выражение преобразует в рациональное относительно новой переменной t. Поскольку рациональные функции мы умеем интегрировать, такие подстановки позволяют интегрировать и иррациональные функции.

Пусть $R(x, y)$- рациональная функция от x и y, т.е. функция, получаемая из x, y и чисел с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, умножения и деления). Примерами таких функций могут служить

$$z=\frac{x^2-y^2}{x^2+3y^2(4x-y)}; \qquad z=\frac{x^3+y^3}{x-y}+\frac{(x^5-6y^2)^7}{(8x^3-9xy)^3}.$$

Если заменить в $R(x, y)$ переменную y выражением $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то получим функцию $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$то одной переменной x. Интеграл от нее имеет вид:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx.$$

Этот интеграл рационализируется с помощью подстановки

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t.$$

В самом деле, так как подкоренное выражение представляет собой дробно – линейную относительно x функцию, то переменная x рационально выражается через переменную t:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n, \qquad x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a}=g(t).$$

Тогда $x'=g'(t)$ - рациональная функция. Заменяя теперь переменную в данном интеграле, получим интеграл от рациональной функции новой переменной t:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R(g(t),)\ \ g'(t)\,dt.$$

Замечание. Если под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же дробно – линейным относительно x подкоренным выражением, то сначала следует провести их к одному показателю, после чего использовать указанный прием.

Примеры

6. Вычислить $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)\,(x+2)\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}$.

Решение

Учитывая, что под корнем содержится дробно–линейно выражение, воспользуемся подстановкой

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t, \text{ откуда } \ x=\frac{t^4+2}{t^4-1}.$$

Выразим все компоненты подынтегрального выражения через t.

$$x-1=\frac{t^4+2}{t^4-1}-1=\frac{3}{t^4-1};\ x+2=\frac{t^4+2}{t^4-1}+2=\frac{3t^4}{t^4-1};$$

$$dx=\left(\frac{t^4+2}{t^4-1}\right)'dt=-\frac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt.$$

Заменив под знаком интеграла переменную x новой переменной t, получим:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}} = \int \frac{-\frac{12t^3}{(t^4-1)^2}dt}{\frac{3}{t^4-1}\cdot\frac{3t^4}{t^4-1}\cdot t} = -\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t}+C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

▲

7. Вычислить $I = \int \frac{1+7\sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}}-5x}{\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}+\sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}}+\sqrt{\frac{5x-1}{7}}}dx$.

Решение

В данном случае под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же подкоренным выражением. Наименьшее общее кратное всех показателей корней, входящих в состав подынтегрального выражения, равно 6, поэтому данный интеграл от иррациональной функции может быть рационалиризован с помощью подстановки:

$$\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}} = t,\; x = \frac{7t^6+1}{5}.$$

Тогда

$$dx = \frac{42}{5}t^5dt,\quad \sqrt{\frac{5x-1}{7}} = t^3,\quad \sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}} = t^2.$$

Заменив переменную под знаком интеграла, получим:

$$I = \int \frac{1+7t^2-(7t^6+1)}{t+t^2+t^3}\cdot\frac{42}{5}t^2dt = -\frac{294}{5}\int\frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1}dt.$$

Под знаком интеграла содержится неправильная рациональная дробь. Для выделения целой части разделим числитель на знаменатель так, как это было сделано ранее.

Получаем:

$$\frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1} = t^8-t^7+t^5-2t^4+t^3+t^2-2t+1+\frac{t-1}{t^2+t+1}.$$

Поэтому

$$I = -\frac{294}{5}\int\left(t^8-t^7+t^5-2t^4+t^3+t^2-2t+1+\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{294}{5}\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^9}{8}+\frac{t^6}{6}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2+t+\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt\right).$$

Для вычисления $\int \frac{t-1}{t^2+t+1}dt$ выделим в знаменателя полный квадрат аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере. Получим:

$$\int \frac{t-1}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) - \sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно находим:

$$I = -\frac{294}{5}\left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t^2 + t + \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) - \sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

где $t = \sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}$. ▲

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от иррациональных функций.

$\int \frac{\sqrt{4+x}}{x}dx.$

$\int x\sqrt{1+x}\,dx.$

$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$

$\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx.$

$\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx.$

$\int \frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)\left(\sqrt[3]{2x-1}-1\right)}dx.$ ▶

4. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx,$$

где $R\left(u, v\right)$ -рациональная функция. Такие интегралы всегда рационализируются подстановкой $t = tg\frac{x}{2}$ $\left(-\pi < x < \pi\right)$. в самом деле,

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

Во многих случаях удается упростить вычисление интегралов вида $\int R(\sin x,\, \cos x)\, dx$, воспользовавшись другими подстановками. Так, если при изменении знака $\sin x$ меняется знак $R(\sin x,\, \cos x)$:

$$R(-\sin x,\, \cos x) = -R(\sin x,\, \cos x),$$

то интеграл можно рационализировать с помощью подстановки $\cos x = t$. Если при изменении знака $\cos x$ меняется знак $R(\sin x,\, \cos x)$:

$$R(\sin x,\, -\cos x) = -R(\sin x,\, \cos x),$$

то целесообразна подстановка $\sin x = t$. Если при одновременном изменении знака $\sin x$ и $\cos x$ $R(\sin x,\, \cos x)$ не меняются:

$$R(-\sin x,\, -\cos x) = -R(\sin x,\, \cos x),$$

то рационализация достигается с помощью одной из подстановок:

$$tg\ x = t, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{или } ctg\ x = t, \qquad 0 < x < \pi.$$

Поясним сказанное на примерах.

Примеры

8. Вычислить $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R(-\sin x,\, \cos x) = -(-\sin x)^3 \cos^2 x = -\sin^3 x \cos^2 x.$$

Воспользуемся подстановкой $\cos x = t$. Заметим, что

$$\sin^3 x \cos^2 x\, dx = \sin^2 x \cos^2 x \sin x\, dx = -(1-\cos^2 x)\cos^2 x$$

$$(-\sin x\, dx) = -(1-\cos^2 x)\cos^2 x\, d(\cos x).$$

Значит,

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = -\int (1-t^2)\, t^2 dt =$$

$$= \int (t^4 - t^2)\, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

▲

9. Вычислим $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)^3}{1+\sin^2 x} = -\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} = -R\,(\sin x,\, \cos x).$$

Воспользуемся подстановкой $\sin x = t$:

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\cos x\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x} d\,(\sin x) =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right) dt = 2\,arctg\, t - t + C =$$

$$= 2\,arctg\,(\sin x) - \sin x + C\,.\ ▲$$

10. Вычислить $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R(-\sin x,\, -\cos x) = R(\sin x,\, \cos x),$$

Значит, в качестве рационализирующей может выступить одна из двух подстановок $tg\, x = t$ или $ctg\, x = t$. Имеем:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx = \int ctg^2 x \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

В данном случае целесообразно сделать подстановку $ctg\ \ x = t$

Тогда $dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ и, следовательно,

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}ctg^3 x + C\,.\ ▲$$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций для преобразования подынтегральных выражений часто используются различные формулы тригонометрии. В первую очередь при

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}; \qquad (5)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}; \qquad (6)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad (7)$$

и их частные случаи:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};$$

Из формул (5), (6), (7) получаем, что при $n\neq m$

$$\int \sin mx\cos nx\ dx=\frac{1}{2}\int \sin(m+n)x+\sin(m-n)x\ dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n}+\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right)+C.$$

$$\int \cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int (\cos(n+n)x+\cos(m-n)x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)+C.$$

$$\int \sin mx\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)+C.$$

Примеры

11. Вычислим $\int \sin^2 x\cos^4 x\ dx$.

Решение

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\ dx=\int (\sin^2 x\cos^2 x)\cos^2 x\ dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos^2 x\ dx=\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int (1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 4x\cos 2x)dx=\frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}+\right.$$

$$+\frac{\sin 2x}{2}-\int\frac{\cos 6x+\cos 2x}{2}\Bigg)=\frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 2x}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 2x}{2}\right)\right)+C=\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{4}\sin 2x-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C\ .\ \blacktriangle$$

12. Вычислим $\int \sin x \sin 3x \sin 5x\, dx$.

Решение

Несколько раз воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму:

$$\int \sin x \sin 3x \sin 5x\, dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 4x)\sin 5x\, dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos 2x \sin 5x\, dx-\frac{1}{2}\int \cos 4x \sin 5x\, dx=\frac{1}{4}\int(\sin 7x+$$

$$+\sin 3x)\, dx-\frac{1}{4}\int(\sin 9x+\sin)\, dx=\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 7x}{7}-\frac{\cos 3x}{3}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 9x}{9}-\cos x\right)+C=\frac{7\cos 9x+63\cos x-9\cos 7x-21\cos 3x}{252}+C.\ \blacktriangle$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от тригонометрических функций.

$\int tg^5 x\, dx$.

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7} dx$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

$\int tg^4 x\, dx$.

$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

$\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$.

$\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx$.

$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

$\int \cos^8 x\, dx$.

►

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

План:

1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции
2. Задача о массе материальной плоской пластины
3. Определение определенного интеграла
4. Классы интегрируемых функций
5. Аддитивность определенного интеграла
6. Теорема о среднем для определенного интеграла
7. Формула Ньютона - Лейбница

Ключевые слова и словосочетания

Криволинейная трапеция, разбиение отрезка, нижняя и верхняя суммой Дарбу, интегрируемая функция, определенный интеграл, классы интегрируемых функций, формула Ньютона – Лейбница, интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Криволинейной трапецией называют фигуру в плоскости xOy, ограниченную прямыми $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ и графиками функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, непрерывных на $[a,\ b]$ и таких, что $f_1(x)\le f_2(x)$ для всех $x\in[a,\ b]$ (рис. 1).

Рассмотрим частный случай такой трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и графиком непрерывной и неотрицательной на $[a,\ b]$ функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (рис. 2). Как найти площадь такой фигуры? Правда, само понятие площади также нуждается в определении, но к этому мы вернемся позднее . Пока же будем опираться на интуитивное представление о площади.

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на ряд мелких участков точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

на каждом участке $[x_k,\ x_{r+1}]$ найдем наименьшее значение функции $y=f(x)$, обозначим его m_k и рассмотрим прямоугольник с основанием $[x_k,\ x_{k+1}]$ и высотой m_k (рис. 3); его площадь равна $m_k(x_{k+1}-x_k)$.

Объединение этих прямоугольников представляет собой вписанную в данную криволинейную трапецию ступенчатую фигуру (рис. 4); ее площадь обозначим s_T (буква T символизирует то разбиение отрезка $[a,\ b]$, которое мы осуществили). Аналогично, если на каждом участке $[x_k,\ x_{r+1}]$ выбрать наибольшее значение функции M_k и рассмотреть прямоугольник с высотой M_k, то объединение таких прямоугольников даст описанную около данной криволинейной трапеции ступенчатую фигуру (рис. 5); ее площадь обозначим S_T.

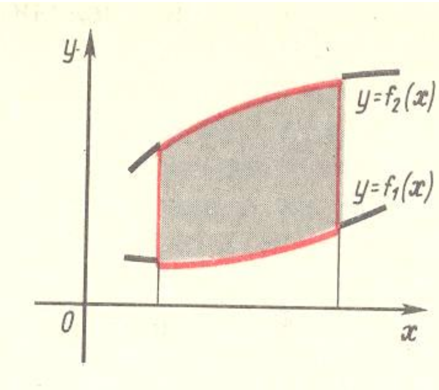

Рис. 1

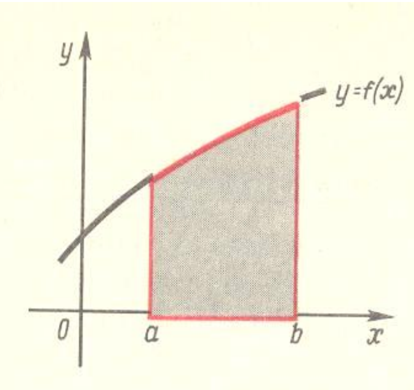

Рис. 2

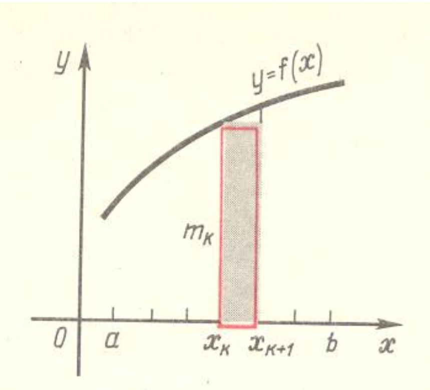

Рис.3

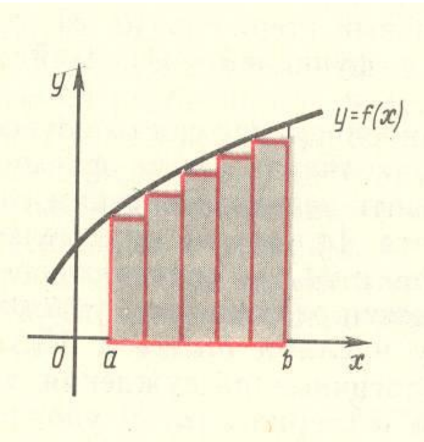

Рис. 4

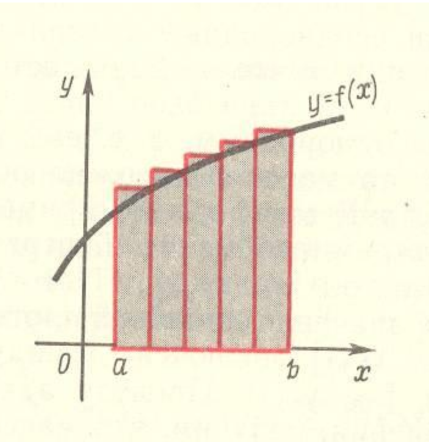

Рис.5

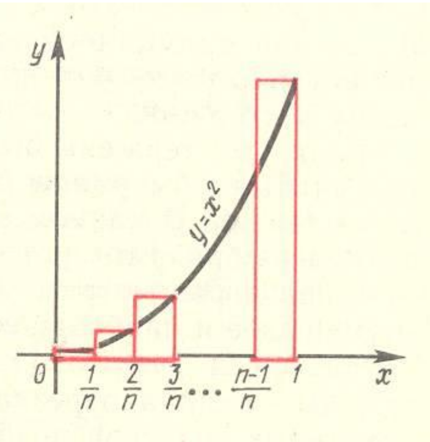

Рис.6

Очевидно, что для любого разбиения T выполняется неравенство $s_T \le S \le S_T$, где S - искомая площадь криволинейной трапеции. Эту площадь можно определить как число, которое не меньше площади любой вписанной ступенчатой фигуры и не больше площади любой описанной ступенчатой фигуры, а точнее как число, разделяющее множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T отрезка $[a,\ b]$. Интуитивно ясно, что такое разделяющее число должно быть единственным.

Искомая площадь S приближенно равна площади вписанной или описанной ступенчатой фигуры, т. е. $S \approx s_T$ или $S \approx S_T$.

На практике делят отрезок $[a,\ b]$ на n равных частей и вместо s_T используют запись s_n, а вместо S_T - запись S_n- Чем больше n, тем точнее приближенное равенство $s_n \approx S$ или $S_n \approx S$. Точное равенство получается при переходе к пределу: $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ или $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Пример 1 (Архимеда). Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (рис. 6).

Решение

Разделим отрезок $[0,\ 1]$ на n равных частей точками

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{n},\quad x_2 = \frac{2}{n},\quad \ldots\ , x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\quad x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Тогда

$$f(x_0) = 1,\quad f(x_1) = \frac{1^2}{n^2},\quad f(x_2) = \frac{2^2}{n^2},\quad \ldots\ , f(x_{n-1}) = \frac{(n-1)^2}{n^2},\quad f(x_n) = \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Составим сумму $\boldsymbol{S_n}$ (площадь ступенчатой фигуры на рис. 6):

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right).$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Значит,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2},$$

откуда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что этот результат был получен еще Архимедом с помощью предельного перехода. ►

2. Задача о массе материальной плоской пластины

Пусть дан прямолинейный неоднородный материальный стержень $[a,\ b]$, линейная плотность которого в точке $\boldsymbol{x}$ выражается функцией $\rho(\boldsymbol{x})$. Найдем массу μ стержня.

Если бы стержень был однородным, т. е. его линейная плотность во всех точках была бы равна ρ, то масса μ стержня вычислялась бы по формуле $\mu = \rho(b-a)$. В данном случае эту формулу применить нельзя. Поступим следующим образом: произведем разбиение T отрезка $[a,\ b]$ на ряд мелких участков и рассмотрим участок $[x_k,\ x_{k+1}]$. Пусть m_k и M_k - соответственно наименьшее и наибольшее значения линейной плотности $\rho(\boldsymbol{x})$ на этом участке. Тогда масса участка $[x_k,\ x_{k+1}]$ заключена между числами $m_k\Delta x_k$ и $M_k\Delta x_k$, где $\boldsymbol{\Delta x_k}$ - длина отрезка $[x_k,\ x_{k+1}]$. Проведя аналогичные рассуждения для остальных участков разбиения, получим, что масса μ стержня $[a,\ b]$ удовлетворяет двойному неравенству

$$s_T \le \mu \le S_T,$$

где

$$s_T = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_{n-1}\Delta x_{n-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k\ ,$$

$$S_T = M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_{n-1}\Delta x_{n-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k\ .$$

Таким образом, масса стержня есть число, разделяющее множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T отрезка $[a,\ b]$.

3. Определение определенного интеграла

Две различные задачи, рассмотренные в предыдущих пунктах, в процессе решения привели к одной и той же математической модели - к двум определенным образом построенным числовым множествам $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$, разделяющимся единственным числом: в первом случае это число определяет площадь криволинейной трапеции, во втором — массу стержня. Оказывается, многие важные задачи из геометрии, физики, техники и других дисциплин, в том числе экономики приводят к такой же математической модели, поэтому есть смысл специально заняться ее изучением. Прежде всего нужно более точно осмыслить процесс решения двух рассмотренных выше задач, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Итак, пусть на отрезке $[a,\ b]$ определена ограниченная функция $y = f(x)$. Произведем разбиение T отрезка $[a,\ b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

на каждом из отрезков разбиения $[x_k,\ x_{k+1}]$ найдем нижнюю и верхнюю грани значений функции, обозначим их соответственно m_k и M_k, и составим суммы

$$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \qquad S_T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k .$$

Первая из этих сумм называется **нижней,** а вторая - **верхней суммой Дарбу**.

Эти суммы обладают следующими свойствами:

1°. Для любого $\boldsymbol{T}$ справедливо неравенство $s_T \le S_T$.

Доказательство следует из того, что $m_k \le M_k$.■

2°. Если к данному разбиению T_1 добавить несколько новых точек, получив тем самым разбиение T_2 отрезка $[a,\ b]$, то $s_{T_1} \le s_{T_2}$, а $S_{T_1} \ge S_{T_2}$

Доказательство следует из того, что если отрезок $[x_k,\ x_{k+1}]$ разбить на два отрезка и на каждом из них найти нижние и верхние грани значений функции - соответственно m'_k, m''_k, M'_k, M''_k - то, $m_k \le m'_k$, $m_k \le m''_k$, в то время как $M_k \ge M'_k$, $M_k \ge M''_k$. ■

3°. Для любых разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a,\ b]$ выполняется неравенство $s_{T_1} \le S_{T_2}$

Доказательство следует из того что, составив разбиение T, включающее в себя все точки разбиения T_1 и все точки разбиения T_2, а затем используя свойства 1° и 2°, получим $s_{T_1} \le s_T \le S_T \le S_{T_2}$.■

Последнее свойство означает, что множество M нижних сумм Дарбу расположено левее множества N верхних сумм Дарбу, построенных для ограниченной на отрезке $[a,\ b]$ функции $y = f(x)$. Тогда найдется хотя бы одно число I, разделяющее множества M и N, т. е. такое, что для любого разбиения отрезка $[a,\ b]$ выполняется двойное неравенство

$$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le I \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_T .$$

Функция $y = f(x)$, ограниченная на отрезке $[a,\ b]$, называется **интегрируемой на этом отрезке**, если существует единственное число I, разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу, образованных для всевозможных разбиений отрезка $[a,\ b]$. Если функция интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то единственное число, разделяющее эти множества, называют **определенным интегралом этой функции по отрезку** $[a,\ b]$ и обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$.

Знак $\int_a^b$ читается: «интеграл от a до b»; числа a и b называются **соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.**

Позднее мы установим связь между $\int f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$, которая сделает оправданным использование знака интеграла и в случае определенного интеграла.

Мы определили интеграл $\int_a^b f(x)dx$ для случая, когда $a < b$. Если $a > b$, то положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Это определение естественно, так как при изменении направления промежутка интегрирования каждая разность $x_{k+1}-x_k$ изменяет знак, а тогда изменят знаки и суммы Дарбу и, следовательно, разделяющее их число, т. е. интеграл.

Так как при $a=b$ все Δx_k обращаются в нуль, то положим

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

Рассматривая в п. 1 задачу о площади криволинейной трапеции, мы получили, что площадь есть число, разделяющее площади вписанных и описанных ступенчатых фигур, а эти площади являются нижними и верхними суммами Дарбу для заданной неотрицательной и непрерывной на отрезке $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ функции $y=f(x)$. Опираясь на интуицию, мы предположили, что это число единственно. Значит, $S=\int_a^b f(x)dx$, т. е. определенный интеграл выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b), y=0$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a,\ b]$ функции $y=f(x)$. В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Рассматривая в п. 2 задачу о массе стержня, мы получили, что масса есть число, разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу для функции $\rho(\boldsymbol{x})$, задающей плотность стержня. По смыслу задачи это число единственно.

Значит, $\mu=\int_a^b \rho(x)dx$, т. е. масса стержня есть интеграл от плотности. В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Пример 2. Приведем пример, показывающий, что существуют неинтегрируемые функции. Напомним, что функцией Дирихле называют функцию $D(x)$, определяемую на отрезке $[0,\ 1]$ равенствами

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x-\text{рациональное число},\\ 0, & \text{если} \quad x-\text{иррациональное число}.\end{cases}$$

Какой бы отрезок $[x_k,\ x_{k+1}]$ мы ни взяли, на нем найдутся как рациональные, так и иррациональные точки, т. е. точки, где $D(x)=0$, и точки, где

$D(x)=1$. Поэтому для любого разбиения отрезка $[0,\ 1]$ все значения m_k равны нулю, а все значения M_k равны единице. Тогда все нижние суммы Дарбу $s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ равны нулю, а все верхние суммы Дарбу $S_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ равны единице, поскольку

$$s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 0\cdot \Delta x_k=0, \qquad S_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot \Delta x_k=1$$

а $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k$ длина отрезка $[0,\ 1]$. Итак, в рассматриваемом случае $\mathfrak{M}=\{0\}$, $\mathcal{N}=\{1\}$ и любое число из промежутка $[0,\ 1]$ разделяет множества $\mathfrak{M}$ и $\mathcal{N}$. Значит, функция Дирихле **не является интегрируемой на отрезке** $[0,\ 1]$.▲

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие интегрируемости функции). Для того чтобы функция $y=f(x)$, определенная и ограниченная на отрезке, была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое разбиение T, что $S_T-s_T<\varepsilon$. Короче:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists T: \quad S_T-s_T<\varepsilon .$$

Доказательство следует из критерия единственности разделяющего числа и свойств 1° и 2° сумм Дарбу.

Поскольку

$$S_T-s_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k-\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} (M_k-m_k)\Delta x_k$$

условие $S_T-s_T<\varepsilon$ можно записать и так:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon . \tag{1}$$

Разность M_k-m_k, будем обозначать через ω_k и называть **колебанием функции** $f(x)$ на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$. Тогда неравенство (1) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k<\varepsilon .\blacksquare$$

4. Классы интегрируемых функций

В предыдущем пункте мы ввели понятие интегрируемой функции и установили необходимое и достаточное условие интегрируемости. Ниже без доказательства приведем ряд теорем, которые выделяют **некоторые классы интегрируемых функций.**

Теорема 2. Если функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Замечание. В литературе по математическому анализу существует много вариантов доказательства теоремы 2. Например, теорему 2 можно доказать используя:

- теорему Кантора о равномерной непрерывности;
- понятие модуля непрерывности функции.

Упражнение

Доказать теорему 2, используя понятие модуля непрерывности функции. ►

Теорема 3. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\ b]$ и монотонна, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,\ b]$ и непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме конечного числа точек c_k, $k=1,2,\ldots,m$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,\ b]$, ограничена, интегрируема на отрезке $[a,\ \eta]$ при любом $\eta\in[a,\ b]$ и существует конечный

$$\lim_{\eta\to b-0}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=A,$$

то она интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b f(x)dx = A.$$

Пример 3. Показать, пользуясь определением интеграла и теоремой 2, что $\int_a^b dx = b - a$.

Решение

Функция $f(x)=1$ непрерывна на отрезке и в силу теоремы 2 интегрируема. Пусть $T=\{x_i,\, i=0,1,\ldots,n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,\ b]$. Так как $f(x)=1$, то для любого разбиения отрезка $[a,\ b]$ все значения m_k равны единице , а все значения M_k также равны единице. Тогда все нижние суммы Дарбу $s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k$ равны 1, а все верхние суммы Дарбу $S_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k$ равны 1, поскольку

$$s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_k=b-a, \qquad S_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_k=b-a$$

а $\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k$ длина отрезка $[a,\ b]$. Итак, в рассматриваемом случае $\mathrm{M}=\{b-a\}$, $\mathrm{N}=\{b-a\}$. Тогда

$$b-a=s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k\le I\le\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k=S_T=b-a,$$

и поэтому $I=\int_a^b dx=b-a$. ▲

Упражнение

Показать, пользуясь определением интеграла и теоремой 2, что $\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}$. ►

5. Аддитивность определенного интеграла

Теорема 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,\ c]$ и $[c,\ b]$, $a<c<b$, то она интегрируема и на отрезке $[a,\ b]$, причем выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \quad \text{(аддитивное свойство интеграла).} \qquad (2)$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как по условию функция интегрируема на отрезке $[a,\ c]$, то в силу теоремы 1 существует разбиение T_1 отрезка $[a,\ c]$ такое, что $S_{T_1}-s_{T_1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогично функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[c,\ b]$ и, значит, существует разбиение T_2 отрезка $[c,\ b]$ такое, что $S_{T_2}-s_{T_2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Эти разбиения T_1 и T_2 в совокупности образуют разбиение T отрезка $[a,\ b]$, причем

$$S_T-s_T=(S_{T_1}-S_{T_2})-(s_{T_1}-s_{T_2})=(S_{T_1}-s_{T_1})+(S_{T_2}-s_{T_2})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Итак, для произвольного числа $\varepsilon>0$ нам удалось построить разбиение $\boldsymbol{T}$ отрезка $[a,\ b]$, такое, что $S_T-s_T<\varepsilon$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$.

Из неравенств $s_{T_1}\le\int_a^c f(x)dx\le S_{T_1}$, $\quad s_{T_2}\le\int_c^b f(x)dx\le S_{T_2}$ следует, что

$$s_T=s_{T_1}+s_{T_2}\le\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\le S_{T_1}+S_{T_2}=S_T.$$

Таким образом, как $\int_a^b f(x)dx$, так и $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ разделяют множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ сумм Дарбу для отрезка $[a,\ b]$. Поскольку эти множества разделяются лишь одним числом, справедливость равенства (2) доказана. ■

Отметим, что если $b<c$, то

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_c^b f(x)dx.$$

Значит, и в этом случае

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Равенство (2) имеет наглядный геометрический смысл: оно выражает **свойство аддитивности площади плоской фигуры.** Так, площадь S криволинейной трапеции $aABb$ изображенной на рис.7, равна $S_1 + S_2$, где S_1 - площадь трапеции $aACc$, а S_2 -площадь трапеции $cCBb$. Но

$$S_1 = \int_a^c f(x)dx, \qquad S_2 = \int_c^b f(x)dx, \qquad S = \int_a^b f(x)dx,$$

откуда следует равенство (2).

С физической точки зрения равенство (2) выражает **свойство аддитивности массы стержня.**

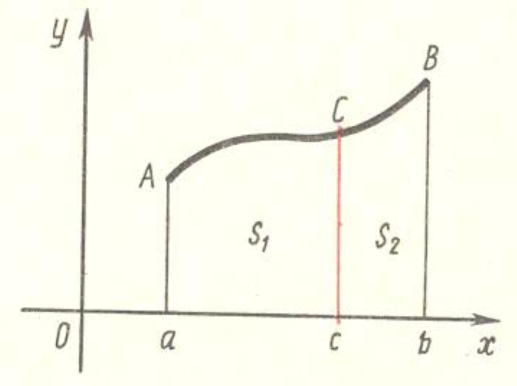

Рис. 7

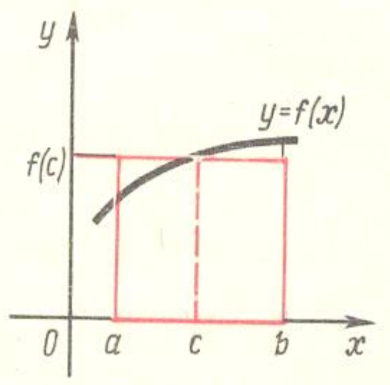

Рис.8

6. Теорема о среднем для определенного интеграла

Теорема 7 (о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то существует точка $c \in [a,\ b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции f на отрезке $[a,\ b]$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что **площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника, имеющего то же основание, что и трапеция, причем высота прямоугольника равна ординате** $f(c)$ **в некоторой точке** c**, лежащей между** a **и** b (рис. 8).

На практике нередко исчисляются такого рода среднее значения, например, средняя производительность труда, средняя мощность электродвигателей и т.д.

Пример 4. Переменные издержки производства определяются формулой $y = 3x$, где x - количество произведенных единиц продукции. Рассчитать средние издержки производства, если объем производства составляет от 3 до 5 единиц.

Решение

Среднее значение функции есть $\frac{1}{5-3}\cdot\int_3^5 3xdx = \frac{3}{2}\int_3^5 xdx = 12$. Поскольку $y = 3x$, имеем:

$$12 = 3x_0, \text{ откуда } x_0 = 4.$$

Средние издержки производства составляют 12. ▲

Упражнение

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, если объем продукции x меняется от 3 до 3 единиц, и указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение. ►

7. Формула Ньютона - Лейбница

В этом пункте мы докажем основную формулу интегрального исчисления, устанавливающую связь между понятиями определенного интеграла и первообразной.

7. 1. Существование первообразной у непрерывной функции. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема по любой части этого отрезка и потому при любом $x \in [a,\ b]$ существует интеграл

$\int\limits_a^x f(x)dx$. Чтобы не смешивать обозначения верхнего предела и переменной интегрирования, будем записывать этот интеграл в виде $\int\limits_a^x f(t)dt$. Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. Если функция $\boldsymbol{f(x)}$ непрерывна на отрезке $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$, то функция

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$$

дифференцируема в любой внутренней точке $\boldsymbol{x}$ этого отрезка, причем

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Иными словами,

интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.

Доказательство. Найдем производную функцию

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt.$$

Выберем Δx столь малым, чтобы точка $x+\Delta x$ лежала внутри отрезка $[a,\ b]$; тогда

$$\Phi(x+\Delta x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Далее,

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

(здесь было использовано аддитивное свойство интеграла).

Теперь к полученному интегралу применим теорему о среднем значении (см. теорему 7):

$$\Delta\Phi=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x,$$

где $c \in [x,\ x+\Delta x]$ (или $c \in [x+\Delta x,\ x]$, если $\Delta x < 0$). Итак, $\Delta \Phi = f(c)\Delta x$, а $\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(c)$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна и $c \to x$ при $\Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$. Поэтому

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x). \ \blacksquare$$

Следствие. Из доказанного утверждения вытекает, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную, а именно функцию Φ, где $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, и поэтому

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C, \qquad a \le x \le b,$$

где $\boldsymbol{C}$ - произвольная постоянная.

Поэтому доказанная теорема называется **теоремой о существовании первообразной для непрерывной функции.**

7. 2. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона - Лейбница).

Теорема 9. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{F(x)}$ - первообразная для функции $f(x)$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на нем и, значит, существует $\int\limits_a^b f(x)dx$. Далее, в силу непрерывности функции $f(x)$ на $[a,\ b]$, на этом отрезке существует ее первообразная.

Согласно теореме 8, функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных для функции $f(x)$; следовательно, для любой первообразной $F(x)$ имеем

$$\Phi(x)=F(x)+C. \tag{4}$$

Заметим, что $\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0$. Из равенства (4) заключаем, что $\Phi(a)=F(a)+C$, т. е. $0=F(a)+C$; значит, $C=-F(a)$. Итак,

$$\Phi(x)=F(x)-F(a),$$

в частности,

$$\Phi(b)=F(b)-F(a). \text{ Но } \Phi(b)=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx.$$

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \ \blacksquare$$

Равенство (3) называется **формулой Ньютона – Лейбница.** Разность $F(b)-F(a)$ записывают в виде $F(x)\Big|_a^b$; тогда $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Пример 5. Функция $\dfrac{x^3}{3}$ - одна из первообразных для функции x^2. Поэтому $\int_a^b x^2dx=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b=\dfrac{b^3}{3}-\dfrac{a^3}{3}=\dfrac{b^3-a^3}{3}$. ▲

7. 3. Свойства определенного интеграла. Из формулы Ньютона - Лейбница легко выводятся основные свойства определенного интеграла. Во всех этих свойствах предполагается, что функции непрерывны на рассматриваемых промежутках.

1°. Интеграл от суммы двух функций $f_1(x)$ и $\boldsymbol{f_2(x)}$ по отрезку $[a,\ b]$ равен сумме интегралов от этих функций по тому же отрезку:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство. Из свойств неопределенного интеграла вытекает, что если $F_1(x)$ - первообразная для $f_1(x)$, а $F_2(x)$ - первообразная для $f_2(x)$, то первообразной для $f_1(x)+f_2(x)$ служит функция $F_1(x)+F_2(x)$. Поэтому

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=(F_1(b)+F_2(b))-(F_1(a)+F_2(a))=$$

$$=(F_1(b)-F_1(a))+(F_2(b)-F_2(a))=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx. \ \blacksquare$$

Аналогично доказывается следующее свойство.

2°. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 6. Вычислить $\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx$.

Решение

Имеем

$$\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx=\int_{-2}^{1}2x^3dx+\int_{-2}^{1}3xdx+\int_{-2}^{1}(-4)dx=3\int_{-2}^{1}x^3dx+3\int_{-2}^{1}xdx-4\int_{-2}^{1}dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1}+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}-4\cdot x\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left((1^4-(-2)^4)+\frac{3}{2}(1^2-(-2)^2)-4(1-(-2)\right)=-24. \ \blacktriangle$$

3°. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, \ b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \tag{5}$$

Доказательство. В самом деле, если $f(x) \geq 0$, то $s_T \geq 0$, а тогда тем более $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. ■

Неравенство (5) допускает простое геометрическое истолкование:

площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции, принимающей только неотрицательные значения, есть неотрицательное число.

4°. Если на отрезке $[a, \ b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{6}$$

Доказательство. В самом деле, $g(x) - f(x) \geq 0$, а тогда согласно свойству 3° имеем $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$), т.е. $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$, откуда и следует неравенство (6). ■

Геометрический смысл неравенства (6) рекомендуем выяснить самостоятельно.

7. 4. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Для определенного интеграла формула интегрирования по частям принимает следующий вид:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{7}$$

В самом деле, если $\int udv = F(x) + C_1$, $\int vdu = \Phi(x) + C_2$ то применяя формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла имеем $\int udv = uv - \int vdu$, т. е.

$$F(x) = u(x)v(x) - \Phi(x) + C.$$

Поэтому $F(b) = u(b)v(b) - \Phi(b) + C$ и $F(a) = u(a)v(a) - \Phi(a) + C$. Значит,

$$F(b)-F(a)=(u(b)v(b)-u(a)v(a))-(\Phi(b)-\Phi(a)),$$

а это и есть формула (7).

Пример 7. Вычислить $\int\limits_1^2 xe^x dx$.

Решение. Положим $u=x,\quad dv=e^x dx$. Тогда $du=dx,\quad v=e^x$. Используя формулу (7), получим

$$\int\limits_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 e^x dx = 2\cdot e^2 - 1\cdot e^1 - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2 .$$

Упражнение

Показать, что для любых $m\in N$, $n\in N$ справедливы равенства

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx = 0;$ б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \pi.$ ►

7. 5. Замена переменной в определенном интеграле. Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ и пусть $x=\varphi(t)$ - дифференцируемая функция, отображающая отрезок [α, β] в отрезок $[a,\ b]$, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Ранее мы установили, что

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C .$$

Значит,

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

Итак, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 10. Пусть функция $y=f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a,\ b]$, а функция $x=\varphi(t)$ определена на отрезке $[\alpha,\ \beta]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и $\varphi([\alpha,\ \beta])=[a,\ b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt . \tag{8}$$

На этом утверждении и основан метод замены переменной под знаком определенного интеграла. Заметим, что на практике формула (8) используется как «слева направо», так и «справа налево».

Условие $\varphi([\alpha,\ \beta])=[a,\ b]$ заведомо выполняется, если функция $x=\varphi(t)$ монотонна на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Это имеет место, если ее производная сохраняет знак на $[\alpha,\ \beta]$.

Пример 8. Вычислить $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x=\varphi(t)=a\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Найдем пределы интегрирования α и β для новой переменной ***t***.

Функция $\varphi(t)=a\sin t$ на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$определена и дифференцируема внутри него, причем $\varphi(0)=0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$ и $\varphi\left(\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,\ a]$. Значит, можно применить формулу (8). Имеем

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t dt=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt==a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t dt=\frac{a^2}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{a^2}{2}\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{a^2}{4}(\sin\pi-\sin 0)=\frac{\pi a^2}{4}.\ \blacktriangle$$

Упражнение

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,\ -a]$. Показать, что:

а) если f - нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$;

б) если f - четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx$. ►

Пример 9. Вычислить $\int\limits_{0,5}^{1,5}\frac{dx}{4x^2-4x+5}$.

Решение

Так как $4x^2-4x+5=(2x-1)^2+4$. Положим $u=2x-1$; тогда $du=2dx$. Если $x=0{,}5$, то $u=2x-1=2\cdot0{,}5-1=0$; если $x=1{,}5$, то $u=2x-1=2\cdot1{,}5-1=2$. Таким образом, 0 и 2 - новые пределы интегрирования. Функция $u=2x-1$ на отрезке $[0{,}5,\ 1{,}5]$ определена, дифференцируема и монотонно возрастает; значит, можно воспользоваться формулой (8) (но если в предыдущем примере мы использовали эту формулу «слева направо», то теперь будем идти «справа налево»). Получаем

$$\int\limits_{0,5}^{1,5}\frac{dx}{4x^2-4x+5}=\int\limits_{0,5}^{1,5}\frac{2dx}{(2x-1)^2+4}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}\frac{du}{u^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}arctg\left(\frac{u}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{4}(arctg1-arctg\,0)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{16}.\ \blacktriangle$$

Упражнение

Показать, что если f - непрерывна на отрезке R^1 периодическая с периодом T функция, то для любого $\alpha\in R^1$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^{a+T}f(x)dx=\int\limits_a^{T}f(x)dx.\ \blacktriangleright$$

ЛИТЕРАТУРА

7. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. **Mathematics for Economics.** Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England. 2001. - 1130 p. **(709 – 733)**

8. Бабаджанов Ш.Ш. **Высшая математика. Часть II**. Учебное пособие. Т.: «IQTISOD MOLIYA», 2015. – 420 с.

9. Малыхин В.И. **Высшая математика.** Учебное пособие. 2- е изд., пераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2009. - 365 с.